Baccalauréat C La Réunion septembre 1983

EXERCICE 1

1. Montrer que, pour tout réel x positif, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

(où $\ln x$ représente le logarithme népérien de x).

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

On admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 2

Dans $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E)\, z^3 - (5+11\mathrm{i})z^2 + (16\mathrm{i}-4)z + 12 - 28\mathrm{i} = 0.$$

1. Vérifier que (E) admet une racine imaginaire pure z_0. Après avoir écrit le premier membre de (E) sous la forme

$$(z - z_0)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right),$$

où α et β sont des nombres complexes à déterminer, résoudre (E).
On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) distinctes de z_0, avec $|z_1| < |z_2|$.

2. Soit P un plan orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère Ω le point d'affixe 2i. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs z_1 et z_2.
Montrer qu'il existe une unique similitude directe de P, notée S, de centre Ω et telle que $S(M_1) = M_2$. Déterminer ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME

Suivant l'usage, $\mathbb{R}^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$ désignent respectivement l'ensemble des nombres réels non nuls, et l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Soit P un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Préliminaire

À tout couple $(a,\ b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}_+^\star$, on associe l'application $\varphi_{a,\ b}$ de P dans P qui, à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax \\ y' & = & by. \end{array}\right.$$

1. **a.** Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que l'on a

$$\varphi_{a,\ b} = \varphi_{a,\ 1} \circ \varphi_{1,\ b} = \varphi_{1,\ b} \circ \varphi_{a,\ 1}.$$

Préciser la nature de $\varphi_{a,\ 1}$ et de $\varphi_{1,\ b}$.

b. Soit M le point de coordonnées (1 ; 2) ; choisissant $a = 2$ et $b = 3$, on pose $m = \varphi_{2,\,1}(M)$ et $M' = \varphi_{1,\,3}(m)$, donc $M' = \varphi_{2,\,3}(M)$.
Dessiner les points M, m et M'.

c. Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble des droites du plan P invariantes par $\varphi_{a,\,2}$ (c'est-à-dire les droites Δ telles que $\varphi_{a,\,2}(\Delta) = \Delta$).

Partie A

On considère les applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f_{\lambda,\,m} : x \longmapsto \frac{\lambda}{x^2}\mathrm{e}^{fracmx},$$

λ et m étant des paramètres, $\lambda \in]0~;~+\infty[$ et $m \in \mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}_{\lambda,\,m}$ la représentation graphique de $f_{\lambda,\,m}$ dans P.

1. Étudier $f_{1,\,0}$ et dessiner $\mathscr{C}_{1,\,0}$.
2. Étudier les variations de $f_{1,\,1}$. Calculer les limites de $f_{1,\,1}$ aux bornes de son ensemble de définition $\Big($pour calculer la limite de $f_{1,\,1}(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures on pourra p
   Calculer la limite de $\dfrac{f_{1,\,1}(x)}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures ; que déduit-on de ce dernier résultat ? Tracer $\mathscr{C}_{1,\,1}$.
3. **a.** Montrer que, quel que soit $(\lambda,~m) \in R_+^\star \times \mathbb{R}^\star$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times R_+^\star$ tel que $\mathscr{C}_{\lambda,\,m} = \varphi_{a,\,b}(\mathscr{C}_{1,\,1})$.

   b. Pour tout $\lambda > 0$ montrer qu'il existe $b \in R_+^\star$ tel que

$$\mathscr{C}_{1,\,0}) = \varphi_{1,\,b}(\mathscr{C}_{1,\,0}).$$

4. Soit $(\lambda,~m) \in R_+^\star \times \mathbb{R}^\star$. Trouver une primitive de $f_{\lambda,\,m}$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Les notations des parties précédentes sont conservées. Soit P_1 l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient $x \neq 0$, et soit P_2 l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient : $x \neq 0$ et $y > 0$.
À tout point $M(x~;~y)$ de P on associe le point M' dont les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ sont données par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{1}{x} \\ y' & = & x^2\mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une bijection de P_1 sur P_2 ; dans la suite, cette bijection sera notée T.
   Déterminer l'application réciproque T^{-1}.
   Dans tout ce qui suit, si E est une partie du plan P, l'image de $\mathrm{E} \cap \mathrm{P}_1$ par T sera appelée (abusivement) : image de E par T.
2. Déterminer l'image par T de la droite d'équation $x = k$ $(k \neq 0)$.
3. **a.** Soit $(\alpha,~\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{D}_{\alpha,\,\beta}$ la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]0~;~+\infty[$ et $m \in \mathbb{R}$ tels que $\mathscr{C}_{\lambda,\,m}$ soit l'image de $\mathrm{D}_{\alpha,\,\beta}$ par T.

   b. Réciproquement, toute courbe $\mathscr{C}_{\lambda,\,m}$ est-elle l'image par T d'une droite $\mathrm{D}_{\alpha,\,\beta}$?

4. On considère les points, donnés par leurs coordonnées :

$$\text{A}(1~;~1),\quad \text{B}\left(\frac{1}{2}~;~0\right)\quad \text{et}\quad \text{C}(1~;~0).$$

a. Déterminer les images A, B$'$ et C$'$ de ces points par T.

b. Quelles sont les courbes $\mathcal{C}_{\lambda,\ m}$ images par T des droites (AB), (BC) et quelle est l'image de la droite (AC) ?

Sur un même graphique représenter l'intersection de ces courbes avec le demi-plan constitué par les points d'abscisses strictement positive.

c. Préciser, sur le graphique, l'image de l'intérieur du triangle ABC et déterminer l'aire de cette image.