Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille septembre 1983

EXERCICE 1

Soit (Ω) et (Ω') deux cercles de centre O et de rayons respectifs R et R' avec $0 < R' < R$. Soit P un point fixé de (Ω') ; à chaque point A de (Ω') distinct de P on associe la droite passant par P et orthogonale à (PA), qui coupe (Ω) en B et C.

1. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G est un point fixe du segment [OP].
2. Trouver les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle ABC.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère l'application φ qui au point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x' ; y')$ telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{4}\\ y' &=& -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une application affine bijective. Définir son application réciproque φ^{-1}.
2. **a.** Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ est une droite D_O que l'on précisera.

   b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le symétrique de M par rapport à M' appartient à D_O.

   c. En déduire une construction simple de M' connaissant le point M.
   Préciser la nature de φ.
3. Soit $(\mathscr{E})$ la courbe d'équation

   $$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 10x + 6y - 11 = 0.$$

   Déterminer une équation de l'image de $(\mathscr{E})$ par φ. Quelle est la nature de cette courbe image ?

PROBLÈME

Soit P le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f l'application numérique d'une variable réelle x définie sur $[0 ; 8]$ par

$$f(x) = \left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Soit $\mathscr{A}_1$ sa courbe représentative dans P.

1. Démontrer que f est continue sur $[0 ; 8]$. Calculer f(O) et f(8). f(x) - 8 20 Montrer que lim = - 00. x-a x

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Que peut-on conclure pour la courbe dl en son point d'abscisse nulle ?
3. Déterminer la dérivée de f sur $]0\,;\,8[$; en déduire les variations de f sur $[0\,;\,8]$.
4. **a.** Démontrer que f réalise une bijection de $[0\,;\,8]$ sur $[0\,;\,8]$.

   b. Déterminer son application réciproque f^{-1}. Que remarquez-vous ? En déduire que la courbe dl admet sur $[0\,;\,8]$ la droite d'équation, y = x comme axe de symétrie. Que peut-on en déduire sur la tangente à dl en son point d'ordonnée nulle ?

   c. Écrire une équation de la tangente à dl au point d'intersection de .011 avec la droite d'équation y = x.
5. Tracer la courbe dl dans $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la courbe d'équation

$$\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{\ x^2}=4 \quad \text{dans } \left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right).$$

Soit s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries orthogonales par rapport aux droites d'équations respectives $y=0$, $x=0$, $y=x$, $y=-x$.

1. Vérifier que $\mathscr{A}$ est globalement invariante par chacune de ces symétries.

   En déduire que $\mathscr{A}$ est globalement invariante dans trois rotations distinctes de centre O et d'angle non nul ; préciser les angles de ces rotations.
2. Démontrer que l'identité de P (notée Id), s_1, s_2, s_3, s_4 et les trois rotations trouvées précédemment constituent un groupe pour la composition des applications.
3. Soit $\mathscr{A}'$ l'ensemble des points M de $\mathscr{A}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $0\leqslant x\leqslant 8$ et $y\geqslant 0$.

   Démontrer que $\mathscr{A}'=\mathscr{D}_1$.

   En déduire la représentation graphique de $\mathscr{A}$ dans $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend un point C situé sur le cercle de centre O de rayon 8, tel que l'angle de vecteurs $\left(\vec{\imath},\ \overrightarrow{\text{OC}}\right)$ ait une mesure t appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
On désigne respectivement par A, B et M les projections orthogonales de C sur les droites Ox, Oy et (AB).

1. Vérifier que $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|$ est constante.
2. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est

$$x\sin t+y\cos t-8\sin t\cos t=0.$$

   Démontrer que les coordonnées de M sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 8\cos^3 t\\ y &=& 8\sin^3 t\end{array}\right.$$

3. Préciser la trajectoire de M quand t décrit l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Calculer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ de M à l'instant t ; en déduire le réel

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\|\overrightarrow{V}(t)\right\| \,\mathrm{d}t.$$

5. On suppose dans cette question que t appartient à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en M à la trajectoire. Reconnaître cette droite.

b. Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x$. Exprimer l'affixe de M en fonction de $\alpha = \cos t + \mathrm{i}\sin t$.

c. Soit I le barycentre des points O ; A ; B affectés respectivement des coefficients - 2 ; 3 ; et 3.

Vérifier que M est l'image de C dans la rotation de centre I et dont une mesure de l'angle est $-4t$.

En déduire d'une part une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IC}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{IM}}}\right)$, et d'autre part que M est sur un cercle de centre I et de rayon indépendant de t.