∽ Baccalauréat C Limoges juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

ABCD est un quadrilatère et a un complexe de module r et d'argument θ.
a, b, c, d représentent les affixes de A, B, C et D dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct.
La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q
La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M
La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N
La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P.
On appellera q, m, n et p les affixes de Q, M, N et P.

1. Déterminer q en fonction de α, a et b.
2. **a.** Montrer que : MNPQ est un parallélogramme équivaut à $n + q = m + p$

   b. En déduire que MNPQ est un parallélogramme équivaut à $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ou ABCD est un parallélogramme.
3. On suppose que ABCD est un parallélogramme et que $\alpha = \dfrac{1+\text{i}}{2}$. En déduire que MNPQ est un carré.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Une urne contient vingt jetons indiscernables au toucher. Cinq jetons portent le numéro 9, deux jetons le numéro 8, six jetons le numéro 3 et sept jetons le numéro 1.
Lorsqu'on tire au hasard un jeton dans l'urne, tous ont la même probabilité d'être obtenus.

1. On tire successivement quatre jetons dans l'urne, sans les remettre après chaque tirage. En notant dans l'ordre les numéros obtenus, on obtient ainsi un nombre de quatre chiffres (le chiffre des milliers étant obtenu au premier tirage, le chiffre des centaines au second, le chiffre des dizaines au troisième et le chiffre des unités au quatrième tirage). Quelle est la probabilité :

   a. d'obtenir le nombre 1 983 ?

   b. d'obtenir un nombre pair ?
2. On procède comme dans la question précédente, mais on remet chaque jeton dans l'ume après l'avoir tiré et noté son numéro. Quelle est la probabilité :

   a. d'obtenir le nombre 1 983 ?

   b. d'obtenir un nombre divisible par 9 et ne comportant pas le chiffre 9 ?

   (On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible, puis une approximation décimale comportant quatre chiffres après la virgule.)

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans tout le problème, a est un réel strictement positif donné et f une application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$.
On se propose de résoudre pour chaque x de $\mathbb{R}_+^\star$, l'équation ; $f(y) = f(x) + f(a)$ d'inconnue y dans $\mathbb{R}_+^\star$, 2 et d'étudier l'application $\begin{array}{llll} g : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y \end{array}$ quand elle est définie.

Partie A

1. Calculer y lorsque f est successivement f_1, f_2, f_3 définies respectivement par

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = \operatorname{Log} x.$$

2. Soit $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+a}{2} \end{array}$ $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2ax}{x+a} \end{array}$ $g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

On note C_1, C_2 et C_3 leurs courbes représentatives respectives.

Tracer, sur un même graphique, ces trois courbes en précisant pour chacune d'elles, la tangente au point d'abscisse a.

Justifier leurs positions relatives.

Partie B

Dans cette partie $f(x) = x^2$.

1. Définir la fonction g associée (on ne demande pas l'étude de cette fonction).

2. Montrer que la représentation graphique C de g, dans un repère orthonormé est une partie d'une conique Γ dont on précisera les axes, les sommets, les asymptotes.

3. Tracer la conique Γ et la courbe C en précisant sa tangente au point d'abscisse a.

Partie C

Dans cette partie, $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Définir la fonction g qui sera notée ici g_a et étudier ses variations.

2. Montrer que la droite d'équation $y = x - \operatorname{Log} 2$ est asymptote à la représentation graphique C_a de g_a.

Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

3. Donner une équation de la tangente à C_a au point d'abscisse a. Construire C_a

4. Si a et b sont deux réels strictement positifs, montrer qu'il existe une translation qui transforme C_a en C_b.

Partie D

Dans cette partie f est une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^\star$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ l'équation $f(y) = \dfrac{f(x) + f(a)}{2}$ a une solution unique $y = g(x)$ appartenant à l'intervalle d'extrémités a et x.

Calculer $g(a)$.

2. On suppose f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$. Montrer que g est dérivable en a et calculer $g'(a)$.