Baccalauréat C Lyon juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit un plan affine P rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; soit m un entier relatif ; soit (D) la droite d'équation $3x-4y=6$ et (D_m) la droite d'équation $16x+3y=m$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3x-4y=6$.
2. Trouver les points de (D) dont les coordonnées sont des multiples de 6.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de m telles que le point d'intersection de (D) et (D_m) ait des coordonnées entières.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs de m telles que les coordonnées entières du point d'intersection de (D) et (D_m) soient divisibles par 6.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. E est un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   D est la droite vectorielle de base : $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. R est la symétrie d'axe D. (R est aussi appelé demi-tour d'axe D).

   Exprimer dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, les vecteurs $R(\vec{i})$, $R(\vec{j})$, $R(\vec{k})$. (On pourra utiliser les images par R de vecteurs orthogonaux à D).

2. $\mathcal{E}$ est un espace affine associé à E rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ dans laquelle un point $M(x~;~y~;~z$ a pour image $M'(x'~;~y'~;~z')$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x' & = & -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z+1\\
y' & = & -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+4\\
z' & = & \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z+2
\end{array}\right.$$

   Reconnaître la nature de f et donner ses éléments caractéristiques. (On pourra rechercher les points M tel que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit parallèle à D).

PROBLÈME **12 POINTS**

N.B. : les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Soit f la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}~;~\frac{\pi}{2}\right[$ et g la fonction définie par

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $h=g\circ f$.
2. Montrer que f a une application réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. Construire sur une même figure les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Montrer que h est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

4. En déduire que $g = f^{-1}$.

5. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Partie B

On considère les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ où n désigne un entier naturel.

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de J_n.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties qu'on a, pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = 2(n+1)I_n$.

3. Établir alors une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire que pour tout n

$$I_n = 2^n \times \dfrac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}.$$

Partie C

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1+\dfrac{1}{1\times 3} \end{array}$$

et plus généralement pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1+\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1\times 2}{1\times 3\times 5}+\dfrac{1\times 2\times 3}{1\times 3\times 5\times 7}+\cdots+\dfrac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}.$$

1. En utilisant les résultats du B, montrer qu'on a, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\int_0^1 \dfrac{1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. On pose $v_n = 2I - u_n$ où I est l'intégrale du A.
Exprimer v_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que pour tout $t\in[0\,;1]$,
$0 \leqslant \dfrac{1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leqslant 1$.
En déduire un encadrement de v_n.

3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n > n_0$,

$$\pi - 2u_n \leqslant 10^{-3}.$$