

Baccalauréat C Maroc juin 1983

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Calculer les restes dans la division par 13 des puissances successives de 6.
2. En déduire le reste dans la division par 13 de $(1982)^{1983}$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre

$$6^{12n} + (2 \times 6^n) + 2$$

est-il multiple de 13 ?

EXERCICE 2

4 POINTS

1. On considère la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x\sqrt{d^2 - x^2},$$

où d désigne un nombre réel strictement positif fixé.

- a. Étudier f et dessiner sa courbe représentative dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
- b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = d$.
2. Déterminer l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets appartiennent à un même cercle de rayon R , R désignant un nombre réel strictement positif fixé.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit \mathcal{P} un plan vectoriel euclidien $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de \mathcal{P} et soit k un nombre réel.

On considère l'endomorphisme φ_k de \mathcal{P} défini par

$$\begin{cases} \varphi_k(\vec{i}) &= \frac{1}{2} \left[(1+k)\vec{i} + (1-k)\vec{j} \right] \\ \varphi_k(\vec{j}) &= \frac{1}{2} \left[(1-k)\vec{i} + (1+k)\vec{j} \right] \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de k , φ_k n'est-il pas bijectif? Pour cette valeur de k , déterminer la nature de φ_k et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles φ_k est une isométrie qu'on précisera.
3. Déterminer les réels λ pour lesquels il existe un vecteur \vec{u} non nul de \mathcal{P} tel que $\varphi_k(\vec{u}) = k\vec{u}$.
4. On suppose que $k \neq 1$. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs trouvées à la question A 3. avec λ_2 indépendante de k .
 - a. Montrer que l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $\varphi_k(\vec{u}) = \lambda_1 \vec{u}$ est une droite vectorielle D_1 dont on précisera une base I .
 - b. Montrer que l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $\varphi_k(\vec{u}) = \lambda_2 \vec{u}$ est une droite vectorielle D_2 dont on précisera une base J .

c. Montrer que (I, J) est une base orthogonale de \mathcal{P} .

Donner la matrice de φ_k dans cette base.

Partie B

Soit P un plan associé à \mathcal{P} . On munit P d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec

$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j}).$$

On considère l'application affine f_k de P à laquelle est associée l'endomorphisme φ_k et telle que le point O soit invariant avec $k \neq 0$.

1. Dans le repère \mathcal{R} , si le point M a pour coordonnées $(x; y)$, déterminer les coordonnées $(x'; y')$ du point $M' = f_k(M)$.

2. Soit $g_1 : x \mapsto g_1(x) = (1-x)e^x$.

Construire la représentation graphique \mathcal{G}_1 de g_1 dans le repère \mathcal{R} .

3. Soit \mathcal{G}_k l'image de \mathcal{G}_1 par f_k . On appelle g_k la fonction dont la représentation graphique est \mathcal{G}_k .

Montrer que pour tout k ($k \in \mathbb{R}^*$), les courbes \mathcal{G}_k admettent une asymptote commune et passent par un point commun.

Donner, selon les valeurs de k , la tableau de variations de g_k et dessiner la représentation graphique de g_k .

4. Déterminer k pour que $\int_0^1 g_k(x) dx = 1$.