Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier septembre 1983

EXERCICE 1

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 2\sqrt{2}(-1+\text{i})$ et les conditions suivantes : pour tout entier naturel n, un représentant de l'argument de z_{n+1} appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ et $z_{n+1}^4 = z_n$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1.
2. On pose $r_n = |z_n|$ et $v_n = \ln r_n$ où $\ln r_n$ désigne le logarithme népérien de r_n.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

EXERCICE 2

On donne dans un plan un cercle fixe (O) de centre O et de rayon R et un point A fixe situé sur (O).
Les points B et D décrivent (O) de telle sorte que DB $= \ell$, ℓ réel donné $(0 < \ell < 2\text{R})$.

1. Déterminer le lieu du milieu I de [BD].
2. Déterminer le lieu du centre de gravité G du triangle ABD.
3. Déterminer le lieu de l'orthocentre H du triangle ABD.
   (On commencera par démontrer $\overrightarrow{\text{OH}} = 3\overrightarrow{\text{OG}}$).
4. Déterminer le lieu du point C, C étant le quatrième sommet du parallélogramme construit sur [AB] et [AD].

PROBLÈME

Les quatre parties du problème sont dans une large mesure indépendantes

On considère les fonctions numériques de variable réelle f et g définies respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x + 1} \qquad g(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

(où ln désigne la fonction logarithme népérien).
Toutes les courbes demandées seront tracées dans un même repère orthonormé (on prendra comme unité 2 cm).

Partie A

1. Montrer que f est impaire. Étudier ses variations. Tracer sa courbe représentative.
2. Soit a un réel différent de 0. Calculer l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie du plan ainsi définie

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & a \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

   $\big($on pourra utiliser le fait que $1 = (1+\text{e}^x) - \text{e}^x\big)$.
   Étudier l'éventuelle limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.

Partie B

1. Soit h la fonction numérique de variable réelle définie dans $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = f(x) - \frac{x}{2}.$$

Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ suivant la valeur de x.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie : $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que

$$\forall n, \qquad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie C

1. La fonction g est-elle paire ? impaire ? Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative.
2. Soit b un réel supérieur à 2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur moyenne $B(b)$ de g sur l'intervalle $[2~;~b]$ ainsi définie

$$B(b) = \frac{1}{b-2}\int_2^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $B(b)$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$.

Partie D

1. Montrer que la restriction de g à $]-1~;~1[$ est une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.

Déterminer sa bijection réciproque.

2. Étant donné un réel x_0 de $\mathbb{R} - \{-1~;~+1\}$, résoudre l'équation, d'inconnue x :

$$g(x) = g(x_0).$$

(Discuter suivant la valeur de x_0)·

3. On considère la fonction $f \circ g$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1~;~+1\}$. Cette fonction $f \circ g$ est-elle paire ? impaire ?

Donner l'expression la plus simple de $f \circ g(x)$ suivant la valeur de x. Étudier les éventuelles limites de la fonction $f \circ g$ en 1 et en -1.

Tracer la courbe représentative de $f \circ g$.