Baccalauréat C Nancy-Metz juin 1983

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On définit l'endomorphisme φ de E par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & -\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}\\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}\\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & \frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} - \frac{1}{3}\vec{k}\end{array}\right.$$

   Montrer que φ est une isométrie vectorielle. Préciser la nature de φ et les éléments géométriques qui la caractérisent.

2. Démontrer que l'application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui admet φ comme endomorphisme associé et qui transforme O en O′ de coordonnées $(-1~;~1~;~1)$ est un vissage dont on déterminera l'axe, l'angle et le vecteur.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

PROBLÈME **3 POINTS**

Dans ce problème $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et Log x désigne le logarithme népérien de x.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x + \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

1. Après avoir montré que f est une fonction impaire, étudier les variations de f et construire, dans $\mathscr{P}$, sa courbe représentative notée C.
2. Vérifier, pour tout x réel, la relation

$$2f'(x) - 1 = [f(x) - x]^2.$$

3. Déterminer les primitives de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$

   $\left(\text{on pourra remarquer que } 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)$.

   Si λ est un nombre réel positif, calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe C et les droites dont les équations respectives sont $y = x - 1$, $x = 0$ et $x = \lambda$.

   Quelle est la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$? (Il est conseillé d'écrire $\mathscr{A}(\lambda)$ sous la forme d'un logarithme unique).

Partie B

Pour tout nombre réel a, on définit les applications S_a et T_a de $\mathcal{P}$ dans lui-même comme suit : à un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ on associe les points $S_a(M)$ de coordonnées $(-x+2a, -y+2a)$ et $T_a(M)$ de coordonnées $(x+a\,;\,y+a)$.
On notera $\mathcal{G}$ l'ensemble des applications S_a et T_a pour tout a réel.

1. Déterminer la nature géométrique des transformations S_a et T_a.

2. Montrer que pour tout couple $(a\,;\,b)$ de nombres réels, les applications composées $S_a \circ S_b$, $T_a \circ T_b$, $S_a \circ T_b$ et $T_a \circ T_b$ appartiennent à $\mathcal{G}$ et que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe du groupe des bijections affines de $\mathcal{P}$ pour la loi de composition.
Est-ce un sous-groupe commutatif ? Montrer que l'on a, pour tout a réel,

$$(1)\, S_a = T_a \circ S_0 \circ T_a^{-1}.$$

3. Dans cette question C désigne la courbe construite dans la partie A du problème.
On note C_a l'image par T_a de la courbe C. Utiliser la relation (1) pour montrer que I de coordonnées $(a\,;\,a)$ est centre de symétrie de C_a. Montrer qu'il existe une fonction f_a telle que l'équation de C_a soit $y = f_a(x)$. Vérifier que
$f_a(x) = a + f(x-a)$.

Partie C

Notons E l'ensemble des fonctions g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2g'(x) - 1 = [g(x) - x]^2.$$

1. Montrer que E n'est pas vide. Montrer que les éléments de E sont des fonctions croissantes et deux fois dérivables.
Calculer $g''(x)$ en fonction de x et de $g(x)$. Quelles sont les valeurs possibles de la fonction dérivée g' en un point x_0 tel que $g''(x_0) = 0$?

2. Caractériser les fonctions dont la dérivée seconde est identiquement nulle et qui appartiennent à E. Montrer que les fonctions f_a définies par
$f_a(x) = a + f(x-a)$, où f est la fonction introduite dans la première question du problème et a un nombre réel, sont des éléments de E.

3. Soit g un élément de E vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [g(x) - x]^2 \neq 1.$$

Montrer que la quantité $\dfrac{g(x) - x - 1}{g(x) - x + 1}$ garde un signe constant quand x décrit $\mathbb{R}$ et que la fonction

$$G : x \longmapsto \text{Log}\left|\frac{g(x) - x - 1}{g(x) - x + 1}\right|$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée G' et en déduire qu'il existe une constante réelle c telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = x + c.$$

Montrer qu'il existe alors un nombre réel k non nul tel que 1+k

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x + \frac{1 + k\text{e}^x}{1 - k\text{e}^x}.$$