Baccalauréat C Nice juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan affine euclidien (P), on donne un triangle équilatéral ABC tel que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right\| = 1$.
Soit A$'$ le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le milieu G du segment [AA$'$] est le barycentre de A, B, C, respectivement affectés des coefficients $2,\ 1,\ 1$.
2. Soit h l'application de (P) dans (P) qui, à tout point M de (P), associe le point M' de (P) tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}.$$

Montrer que h est une homothétie affine dont on précisera le centre et le rapport.
Calculer $2\mathrm{GA}^2 + \mathrm{GB}^2 + \mathrm{GC}^2$.
Trouver l'ensemble des points Nde (P) tels que :

$$2N\mathrm{A}^2 + N\mathrm{B}^2 + N\mathrm{C}^2 = 2.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit U la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad U(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. Étudier U et tracer la courbe représentative de U dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 6 cm).
2. Soit r la restriction de U à l'intervalle J = $[1\ ;\ +\infty[$.
   a. Montrer que r est une bijection de I sur l'intervalle J = $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
   b. On désigne par r^{-1} la bijection réciproque de r (on n'explicitera pas r^{-1}). Représenter graphiquement r^{-1} dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   c. Étudier la dérivabilité de r^{-1} sur J.

Partie B

Dans toute la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel.
On note φ l'application de E dans E qui, à f élément de E, asssocie $F = \varphi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que, pour toute fonction f de E, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en 0 ; exprimer $F'(x)$ en fonction de $f(x)$.

En déduire que φ est injectif.

3. **a.** Soit g une fonction de E, qui s'annule en 0, dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée continue. On désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g'(x)\mathrm{e}^{x^2}$$

Montrer que $\varphi(h) = g$; en utilisant les résultats des questions 2. et 3. a, caractériser l'image de φ.

b. Déterminer les antécédents des fonctions U, V, W définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2};\ V(x) = \mathrm{e}^{-x^2};\ W(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

4. Soit $\mathscr{P}_2$ le sous-espace vectoriel de E dont une base est $\left(f_0,\ f_1,\ f_2\right)$; f_0, f_1, f_2 sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1; \quad f_1(x) = x; \quad f_2(x) = x^2.$$

a. Montrer que $\left(f_0,\ 2f_1,\ f_0 - 2f_2\right)$ est une base de $\mathscr{P}_2$

b. En déduire que $\left(\varphi\left(f_0\right),\ V,\ W\right)$ est une famille libre de $\varphi(\mathscr{P}_2)$. Montrer que $\left(\varphi\left(f_0\right),\ V,\ W\right)$ est une base de $\mathscr{P}_2$ (On ne calculera pas $\varphi\left(f_0\right)$.

Partie C

Pour n entier naturel et x réel, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ pour } n \geqslant 1 \text{ et } I_0 = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier supérieur ou égal à 2 et tout réel x on a l'égalité :

$$(n-1)I_{n-2}(x) - 2I_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

b. Calculer $I_1(x)$; en déduire $I_3(x)$.

c. Calculer $I_2(x)$ en fonction de $I_0(x)$ que l'on ne calculera pas.

2. On désire prouver qu'il existe un réel A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant I_0(x) \leqslant A.$$

a. Montrer que la fonction, définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $x :\longmapsto I_0(x)$ est croissante et positive.

b. Montrer que : $I_0(x) - I_0(1) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

c. Montrer que :

$$\forall t \in [1\ ;\ +\infty[, \quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

En déduire que :

$$\forall x \in [1\ ;\ +\infty[, \quad I_0(x) - I_0(1) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

d. Trouver alors un réel A tel que :

$$\forall x \in R_+^\star, \quad I_0(x) \leqslant A.$$

3. Déduire des questions 1. c et 2. d que l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$), l'axe des x et la courbe représentative de la fonction U étudiée au A, est majorée par une constante indépendante de λ.