Baccalauréat C Centres Outre-Mer septembre 1983

EXERCICE 1

A. Question préliminaire :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0.$$

On notera S l'ensemble des solutions.

B. On considère la fonction f de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R} - S$ par

$$x \longmapsto f(x) = \ln\left|e^{2x} - 4e^{x} + 3\right|$$

où la notation ln représente le logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 4e^{x} + 3 > 0$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\ln e^{2x}\left(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}\right) - 2x\right]$.
3. Étudier et représenter graphiquement, dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la fonction f. On précisera les asymptotes à la courbe représentative. On prendra comme unité 2 cm, et on donne

$$\ln 2 \approx 0,7 \qquad \ln 3 \approx 1,1.$$

EXERCICE 2

Soit E un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit Γ l'ensemble des points de E dont les coordonnées $(x,\ ;\ y)$ dans $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ vérifient :

$$(1) \qquad 16x^4 + 72x^2y^2 + 81y^4 - 576x^2 = 0.$$

   Montrer que Γ est la réunion de deux coniques qu'on déterminera et qu'on représentera. (On pourra écrire, dans (1), le membre de gauche comme différence de deux carrés.)

2. Déterminer la trajectoire du point M dont les coordonnées $(x,\ ;\ y)$ dans $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont données en fonction du temps t par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 3(-1)^{\text{E}\left(\frac{t+\pi}{2\pi}\right)}(1+\cos t)\\ y & = & 2\sin t\end{array}\right. \qquad \text{avec } t \in [0\ ;\ 4\pi].$$

   Préciser le déplacement de M sur sa trajectoire.
   (On rappelle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, E(α) désigne l'entier relatif m tel que $m \leqslant \alpha < m+1$; on pourra envisager successivement les cas suivants :

$$t \in [0\ ;\ \pi[, \quad t \in [\pi\ ;\ 3\pi[, \quad t \in [3\pi\ ;\ 4\pi].)$$

PROBLÈME

On désigne par $\mathscr{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. À tout point M du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est associé le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, appelé affixe du point M.
On désigne par $\mathscr{P}'$ le plan $\mathscr{P}$ privé de la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{u}$, par $\mathbb{C}'$ l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes privés de $\mathbb{R}$.

1. Soit z un élément de $\mathbb{C}'$ et t un réel. Montrer que $z\sin t + \cos t$ n'est pas nul et, posant $z = x + \text{i}y$, déterminer en fonction de t, x, y les parties réelles et imaginaires de

$$z' = \frac{z\cos t - \sin t}{z\sin t + \cos t}$$

Établir que z' est élément de $\mathbb{C}'$.

Dans toute la suite du problème, pour tout réel t, on désigne par f_t l'application de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}'$ telle que

$$f_t(z) = \frac{z\cos t - \sin t}{z\sin t + \cos t}$$

L'application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}'$ qui, au point M' d'affixe $z' = f_t(z)$ sera notée F_t.

2. Rechercher les points invariants de F_t. Discuter selon les valeurs de t.

3. Montrer que, pour tout couple $(t,\ t')$ de réels, $F_{t+t'} = F_t \circ F_{t'}$. En déduire que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications F_t, où t décrit $\mathbb{R}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe abélien.

4. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{v}$, privée du point O.

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de $\mathscr{P}'$ dont l'image par F_t appartient à $\mathscr{D}$.

Établir, en s'aidant des résultats obtenus dans la première question :

- **a.** que si $\sin 2t = 0$, $\mathscr{E} = \mathscr{D}$. Donner alors les applications F_t correspondantes, et montrer que toutes ces applications sont involutives.
- **b.** que si $\sin 2t \neq 0$, $\mathscr{E}$ est alors une partie, à préciser, d'un cercle.

5. Dans cette question, t désigne un réel de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$. On note Ω_1 et Ω_2 les points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives $-\text{cotg}\,t$ et $+\text{cotg}\,t$.

- **a.** Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}'$, exprimer en fonction de t le produit :

$$\left(f_t(z) - \text{cotg}\,t\right)(z + \text{cotg}\,t).$$

  En déduire une relation liant $\left\|\overrightarrow{\Omega_2 M'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{\Omega_1 M}\right\|$, et une relation liant les angles de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega_2 M'}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega_1 M}}\right)$. (On rappelle que M' désigne $F_t(M)$.)

- **b.** Utiliser la partie 5. a. pour construire géométriquement le point M' correspondant au point M de coordonnées $\left(-\dfrac{5}{2}\ ;\ 2\right)$, pour $t = \dfrac{\pi}{4}$.
- **c.** Utilisant encore les résultats de 5. a., déterminer l'image par F_t de l'ensemble des points de $\mathscr{P}'$ appartenant à un cercle centré en Ω_1 de rayon non nul.

6. On note A et B les points d'affixes respectives i et $-$i. Le point M_0 d'affixe z_0 est supposé fixé et d'ordonnée non nulle. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{G}$ des points $F_t\,(M_0)$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

a. Établir la relation :

$$\frac{f_t(z_0)-\mathrm{i}}{f_t(z_0)+\mathrm{i}} = (\cos 2t - \mathrm{i}\sin 2t)\frac{z_0-\mathrm{i}}{z_0+\mathrm{i}}.$$

b. Montrer que si un point $M' = F_t(M_0)$ appartient à $\mathcal{G}$, alors $\dfrac{\mathrm{A}M'}{\mathrm{B}M'} = \dfrac{\mathrm{A}M_0}{\mathrm{B}M_0}$.

Étudier le problème réciproque.

Établir que l'ensemble des points M' tels que $\dfrac{M'\mathrm{A}}{M'\mathrm{B}} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}$) est un cercle, et conclure à propos de $\mathcal{G}$.