

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

Soit E l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on appelle P le plan vectoriel de base (i, j) et D et Δ les droites de E définies par les équations :

$$D: \begin{cases} x = 1 \\ y = \end{cases} \quad \Delta: \begin{cases} x = 2+y \\ z = 1-y \end{cases}$$

On appelle f la projection sur D de direction \vec{P} et g la projection sur Δ de direction \vec{P} .

Soit h l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M_1 barycentre des points $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$ affectés respectivement des coefficients λ et $1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer les coordonnées de M' et M'' en fonction de celles de M .
2. Déterminer la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Soit un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) ; à tout point M de coordonnées $(x; y)$ on associe son affixe $z = x + iy$.

On donne trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c non nulles et trois points P, Q, R d'affixes respectives

$$p = \frac{|a|}{a}, \quad q = \frac{|b|}{b}, \quad r = \frac{|c|}{c}$$

1. Soit H le point défini par $\vec{OH} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}$.
 - a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle PQR .
 - b. Montrer que le triangle PQR est équilatéral si, et seulement si, $p + q + r = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p + q + r = 0$.
 - a. Montrer que pour tout point M d'affixe z on a

$$|z - a| + |z - b| + |z - c| \geq |a| + |b| + |c|$$

- b. En déduire qu'il existe un point M tel que $MA + MB + MC$ soit minimum.

PROBLÈME

Partie A

1. m est un nombre réel donné. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$(E_m) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x(2-x) = m \end{cases}$$

2. On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

- a. Montrer que f est dérivable. On étudiera soigneusement la dérivabilité de f en 0, où on précisera le nombre dérivé.
- b. Quelle est la fonction dérivée de f ? Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que $f(a) = a(2-a)$. Montrer que $a \in]1, 59; 1, 6[$.
- c. Étudier les variations de f . Construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 2 cm pour unité).

3. On pose, pour tout réel positif x

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

- a. Est-ce légitime ?
On a ainsi défini deux applications de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} , notées F et G .
- b. Calculer $G(x)$. Montrer que G admet une limite en $+\infty$ et calculer cette limite.
On ne cherchera en aucune manière à calculer $F(x)$.
- c. Prouver qu'il existe un réel h tel que :

$$(\forall t) (t \in]h; +\infty[\Rightarrow f(t) \leq 2t^2 e^{-t}).$$

En déduire que F est une fonction bornée.

Montrer que F est une fonction croissante.

On admet que les résultats des questions 3. d et 3. e permettent de conclure que F admet une limite en $+\infty$. Cette limite est notée L .

Le but de la partie B est d'obtenir, son existence étant admise, une valeur approchée de L .

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul x on a

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-(k-1)x} + e^{-kx} + \frac{e^{-kx}}{e^x - 1}.$$

- b. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel positif x on a

$$0 \leq \int_0^x f(t) e^{-kt} dt \leq \frac{a(2-a)}{-k}.$$

- c. En intégrant par parties, calculer, k étant un entier naturel non nul et x un réel positif donnés, l'intégrale :

$$I_k(x) = \int_0^x t^2 e^{-kt} dt$$

dont on justifiera l'existence.

- d. Montrer que la fonction I_k définie ci-dessus admet une limite en $+\infty$. Calculer cette limite.

2. a. Montrer que pour tout réel positif x on a

$$\int_0^x f(t)e^{-kt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^{p=k} I_p(x)$$

En déduire que la fonction qui à tout réel positif x associe l'intégrale $\int_0^x f(t)e^{-kt} dt$ a une limite en $+\infty$. On notera ℓ_k cette limite.

- b. Montrer que pour tout entier naturel non nul k on a

$$L - I_k = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{k^3} \right)$$

- c. En utilisant la majoration obtenue au B 1. b, montrer que la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- d. Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_k = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{k^3}$$

est convergente et a pour limite le réel L' tel que $L = 2L'$.

3. a. Trouver une condition, portant sur l'entier naturel k , suffisante pour que $I_k \leq 0,1$.
- b. En déduire $2,3 \leq L \leq 2,5$.