Baccalauréat C Polynésie septembre 1983

EXERCICE 1 **5 POINTS**

On se propose d'étudier l'existence et les propriétés de la suite (u_n) définie par la donnée d'un réel u_0 et la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-u_n}{2}}.$$

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) existe si, et seulement si, $u_0 \in [-1\ ;\ +1]$.

   b. Déterminer u_0 de sorte que la suite (u_n) soit constante.

2. Dans la suite de l'énoncé, on posera $u_0 = \sin \alpha_0$ avec : $\alpha_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   a. Justifier ce choix. Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

   b. Établir l'égalité, pour tout $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$,

   $$\sqrt{\dfrac{1-\sin \alpha}{2}} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right).$$

   c. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\alpha_n \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \sin \alpha_n$.

   Quelle relation y a-t-il entre α_{n+1} et α_n ?

   d. On considère la suite $\left(\beta_n\right)$ de terme général vérifiant :

   $$\beta_n = \alpha_n - \dfrac{\pi}{6}.$$

   Montrer que cette suite est une suite géométrique.

   En déduire α_n puis u_n en fonction de n et α_0.

   La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Quelle est cette limite ?