

❧ Baccalauréat C Pondichéry mai 1983 ❧

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4 \cos^3 x - 3 \cos^2 x) dx$.

EXERCICE 2

Une personne compose au hasard un numéro de téléphone à 6 chiffres (un cadran téléphonique comporte les dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

- Calculer les probabilités des évènements suivants :
 - la personne compose le numéro 11-03-50
 - la personne compose un numéro de téléphone dont les chiffres sont tous distincts
 - la personne compose un numéro dont les chiffres constituent une suite strictement croissante (par exemple, le 03-47-89).
- Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de chiffres 0 utilisés dans le numéro composé par cette personne.
Déterminer la loi de probabilité de X .

PROBLÈME (PARTIEL)

Partie II. (π) est un plan vectoriel euclidien de base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) .

F désigne l'ensemble des endomorphismes de (π) dont le noyau contient la droite vectorielle (D) de base $\vec{i} + \vec{j}$.

G désigne l'ensemble des endomorphismes de (π) ayant une image incluse dans (D) .

- Donner deux exemples démontrant que F et G ne sont pas vides.
- Démontrer que, pour tout Φ de F et tout Ψ de G , $\Psi \circ \Phi \in F \cap G$.
Identifier $\Phi \circ \Psi$.
- s étant la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base \vec{i} et r la rotation vectorielle d'angle droit direct, calculer $(s+r)(\vec{i})$ et $(s+r)(\vec{j})$.
En déduire que $s+r$ appartient à $F \cap G$. Déterminer le noyau et l'image de $s-r$.
- E est l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que Φ est élément de F si et seulement si sa matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) appartient à E .

En déduire que F est le plan vectoriel de base (p, q) , p et q ayant respectivement pour matrices A et B .

Démontrer que Φ est élément de F si et seulement si sa matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) appartient à E .

En déduire que F est le plan vectoriel de base (p, q) , p et q ayant respectivement pour matrices A et B .

- Caractériser géométriquement p et $-q$.

Partie III. P est un plan affine associé à (π) de repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Soit f l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= x \end{cases}$$

Démontrer que l'endomorphisme φ associé à f est la somme de p et d'une projection vectorielle Ψ appartenant à l'ensemble G de la partie II dont on précisera les éléments.

En remarquant que le point O est invariant par f , donner une construction de M' à partir de M .

Démontrer que f est bijective.

2. Soit h_1 et h_2 les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$h_1(x) = 2x + \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \quad ; \quad h_2(x) = 2x - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

On désigne par C_1 et C_2 leurs représentations graphiques respectives.

- a. Étudier les variations de h_1 . Tracer C_1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Démontrer que C_1 et C_2 sont symétriques par rapport au point O . Tracer C_2 .
- b. Soit C la réunion de C_1 et C_2 . Démontrer que l'image de C par f est une conique dont on déterminera les éléments. Tracer cette conique.