Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rouen septembre 1983

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, i étant le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère l'application f de $\mathbb{C} - \{1+3\text{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation

$$f(z) = \frac{z+5-\text{i}}{z-1-3\text{i}}$$

On appelle A et B les points d'affixe $-5+\text{i}$ et $1+3\text{i}$ respectivement.
Dans un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $F(M) = M'$ d'affixe $f(z)$.

1. Déterminer les points invariants par F.
2. **a.** Déterminer analytiquement l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que M' appartienne à $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$, axe des réels.
   Déterminer analytiquement l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que M' appartienne à $\left(\text{O}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, axe des imaginaires purs.
   Déterminer analytiquement l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.
   b. Faire une figure claire représentant ces trois ensembles E_1, E_2 et E_3 et retrouver ces résultats par des considérations géométriques.

EXERCICE 2

Soit E l'espace orienté, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit f l'application affine de E dans E, qui à tout point M de E de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x' & = & \frac{\sqrt{2}+2}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}-2}{4}z\\
y' & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{2}z\\
z' & = & \frac{\sqrt{2}-2}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}+2}{4}z.
\end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que f est une rotation de E, dont l'axe D est la droite de vecteur directeur $\left(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{\imath}\right)$ passant par O.
   b. Soit les vecteurs

   $$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{\imath}\right), \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{e_3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}\right).$$

   Montrer que $\mathcal{R}' = \left(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ est un repère orthonormé direct de E.
   c. Montrer que les plans orthogonaux à D ont pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$. On oriente ces plans par la base $\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. Déterminer une mesure de l'angle de la rotationf
2. Donner l'expression analytique de f dans $\mathcal{R}'$.

PROBLÈME

Partie A Question préliminaire

Soit g la fonction polynôme définie dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x - m$, où m est un paramètre réel non nul.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
2. Lorsque cette équation a deux racines réelles distinctes x' et $x''(x' < x'')$, placer -1 et 0 par rapport à x' et x''. Pour cela on pourra étudier le signe de $g(0)$ et $g(-1)$ et démontrer que :
   – si $m > 0$, 0 et -1 sont entre x' et x'' et
   – si $m < 0$, les racines x' et x'' sont négatives et situées entre -1 et 0.

Les parties B, C, D sont dans une large mesure indépendantes. Dans ces trois parties on appelle P un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

Soit $m > 0$. Soit f_m l'application définie sur $\mathbb{R}^\star - \{-1\}$ par

$$f_m(x) = x + 1 + m\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

et $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Donner les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f_m.
3. Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_m$. Étudier complètement la position des courbes $\mathscr{C}_m$ par rapport à leur asymptote oblique D.
4. Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point fixe 1. Démontrer que I est centre de symétrie de chaque courbe $\mathscr{C}_m$?
5. Construire $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_1$ dans le même repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unité 2 cm. (On ne précisera pas les points d'intersection avec les axes ni les points d'inflexion).
6. Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et soit $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie de plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_1$ et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$.
   Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$. Quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0_+ ?

Partie C

Soit $t \in \mathbb{R}^\star$ et g_t l'application affine de P dans P telle que

$$g_t : M(x\ ;\ y) \longmapsto M'\left(x'\ ;\ y'\right) \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & (1-t)x + ty + 1 - t.\end{array}\right.$$

1. Soit $G = \left\{g_{t,\ t\in\mathbb{R}^\star}\right\}$. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans G définie par :
   $\forall\, t \in \mathbb{R}^\star$, $\varphi(t) = g_t$.
   Démontrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^\star,\ \times)$ dans $(G,\ \circ)$. Quelle est la structure de $(G,\ \circ)$? (On note $\circ$ la composition des applications).
2. Quel est l'ensemble des points invariants par g_t ?
3. Soit H l'image de M par la projection sur la droite D (dont une équation est $y = x + 1$), parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $\vec{\jmath}$.
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{H}M'}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{H}M}$.

4. Soit $\mathscr{F} = \{\mathscr{C}_m,\ m > 0\}$, où $\mathscr{C}_m$ est la courbe définie en B.

  a. Démontrer que, $\forall t \in \mathbb{R}_+^\star$ l'image par g_t, d'un élément de $\mathscr{F}$ est un élément de $\mathscr{F}$.

  b. Déterminer le réel t tel que l'image de $\mathscr{C}_2$ par g_t, soit $\mathscr{C}_1$.

Partie D

Soit M un point mobile dans le plan P dont les coordonnées à la date t $\left(t \in \mathbb{R}_+^\star\right)$ sont

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \\ y & = & \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1} + 2t + 1 \end{array}\right.$$

1. Démontrer que la trajectoire γ du point M est contenue dans la courbe $\mathscr{C}_2$.

2. Déterminer l'image de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par la fonction $h\ :\ t \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1}$. En déduire la trajectoire γ. Préciser le sens de parcours de M.