∽ Baccalauréat C Strasbourg juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le symbole Log désigne le logarithme népérien.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \text{Log}\,|x+1|.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien E muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. On considère la fonction F définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_3^x f(t)\,\text{d}t.$$

   Déterminer le sens de variation de la fonction F.
3. Soit Δ l'ensemble des points M de E, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant :
   $3 \leqslant x \leqslant 5\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
   Calculer l'aire de Δ.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

1. Dans un plan affine Π rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère l'application f qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $(x\ ;\ -y)$.
   Reconnaître cette application et vérifier qu'elle laisse invariante la courbe $\mathscr{P}$ d'équation : $y^2 = -x + \dfrac{1}{4}$.
2. À chaque réel a, on associe l'application affine f_a de Π dans Π, qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & x + 4ay - 4a^2 \\ y' & = & 2a - y \end{array}\right.$$

   Donner la nature de f_a et ses éléments caractéristiques. Vérifier que, pour tout a réel, la courbe $\mathscr{P}$ est invariante par f_a.
3. On appelle F l'ensemble de toutes les applications $f_a$lorsque a décrit lit Montrer que F, muni de la loi de composition des applications, n'est pas un groupe.
   Montrer que pour tout triplet $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{R}^3$, $f_c \circ f_b \circ f_a$ appartient à F.
   En déduire que pour tout couple $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$, il existe un réel m tel que :

$$f_b \circ f_a = f \circ f_m = f_{-m} \circ f.$$

4. On désigne par G l'ensemble de toutes les applications de la forme $f \circ f_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$. Montrer que F $\cup$ G, muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

5. On définit le point Ω et le vecteur $\overrightarrow{J}$ de la façon suivante

$$\overrightarrow{\text{O}\Omega} = \left(-a^2 + \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{\imath} + a\overrightarrow{\jmath}\ ; \overrightarrow{J} = -2a\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\ .$$

a. Vérifier que $\overrightarrow{J}$ est un vecteur directeur de la tangente en Ω à $\mathcal{P}$.

b. Vérifier que pour tout M de $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{Mf_a(M)}$ et $\overrightarrow{J}$ sont liés.

c. On suppose la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormée, on choisit a égal à 1. Dessiner $\mathcal{P}$, placer le point Ω et le vecteur $\overrightarrow{J}$. Indiquer comment construire l'image $f_a(M)$ d'un point M de $\mathcal{P}$.

Partie B

Dans cette partie, le plan affine Π est supposé euclidien et le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ de π orthonormé. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, et par $\mathcal{U}^\star$ l'ensemble $\mathcal{U}$ privé du réel 1.

1. Soit u un élément de $\mathcal{U}^\star$; on pose $u = \cos\theta + \text{i}\sin\theta$ avec $\theta \in]0\ ;\ 2\pi[$.
Déterminer le module et un argument de $1-u$ en fonction de θ. En déduire le module et un argument de $\dfrac{1}{1-u}$ et $\dfrac{1}{(1-u)^2}$.

2. Montrer que :

a. l'ensemble des points M de Π d'affixe $z = 1-u$ où u décrit $\mathcal{U}^\star$ est le cercle de centre A d'affixe 1, et passant par O ;

b. l'ensemble des points M de Π d'affixe $z = \dfrac{1}{1-u}$ où u décrit $\mathcal{U}^\star$ est la médiatrice D de [OA] ;

c. l'ensemble des points M de Π d'affixe $z = \dfrac{1}{(1-u)^2}$ où u décrit $\mathcal{U}^\star$ est la parabole de foyer O et de directrice D.

3. Soit B le point d'affixe $b (b \neq 0)$, M le point d'affixe z ; interpréter le module de $z-b$.

a. Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z = b(1-u)$, u décrivant $\mathcal{U}$?

b. Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z = -1b$, u décrivant $\mathcal{U}$?