

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Tahiti septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

On désigne par \mathbb{C} le corps des nombres complexes et par \bar{z} le conjugué de z .
Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = \bar{z}^3$.

1. Quel est l'ensemble des nombres z tels que $f(z) = \bar{z}$?
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $f(z)$.
Quel est l'ensemble des points M tels que le triangle MOM' soit rectangle en O ?
Quel est l'ensemble des points M tels que M, O et M' soient alignés?
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes images par f des nombres complexes de module 1.
4. Déterminer et représenter dans le plan complexe les points M , d'affixe z telle que $f(z) = i$.

EXERCICE 2

Les vingt élèves d'une classe ont été pesés et chronométrés sur un parcours de 80 m.
Les données sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

X : poids en kg	62	62	59	57	62
Y : temps en s	10,3	11	10,5	11,1	11,5
X : poids en kg	58	57	60	55	65
Y : temps en s	10	11,3	9,9	11,8	10,8
X : poids en kg	66	66	64	65	80
Y : temps en s	10,6	11,4	10,9	11,9	11,8
X : poids en kg	70	65	51	55	65
Y : temps en s	11,3	11,8	11,4	11,9	10,9

1. Construire le nuage de points correspondants.
2. Déterminer les équations des droites de régression.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .

PROBLÈME

Pour tout entier naturel k non nul, on définit dans \mathbb{R} la fonction numérique f_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = 1 + \frac{x^k - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

On désigne par \mathcal{C}_k la courbe représentative des variations de f_k dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan P (unité : 2 cm).

Partie A

1. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_k ont exactement 2 points communs, que l'on déterminera.

2. a. Étudier les variations de f_1 .
- b. Construire \mathcal{C}_1 . Préciser les tangentes aux points d'intersection de \mathcal{C}_1 avec la droite d'équation $y = x$.

Partie B

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de u_0 , réel positif, et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f_1(u_n)$$

1. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = 0$ ou si $u_0 = 1$?
2. Dans cette question, on suppose que $u_0 > 1$.
 - a. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
 - b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
3. Dans cette question, on suppose que $0 < u_0 < 1$.
 - a. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
 - b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

1. Étudier les variations de f_2 .
2. Démontrer que \mathcal{C}_2 admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote.
3. Tracer \mathcal{C}_2 dans le même repère que \mathcal{C}_1 . Préciser la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Partie D

On pose 2

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \, dx, \quad K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

1. Soit f la fonction numérique définie dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

(où \ln désigne la fonction logarithme népérien).

Calculer $f(-x) + f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Étudier les variations de f . Tracer sa courbe représentative.

2. Déduire de l'expression de $f'(x)$ le réel K .
3. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J .
4. Vérifier que $I = J + K$. En déduire les valeurs de I et J .
5. Calculer $\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$.
Déduire de ce qui précède l'aire de la région de plan limitée par \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.