Baccalauréat C Toulouse juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

n étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs a et b définis par :

$$a = 3n^2 - 7n - 8 \quad ; \quad b = n - 2.$$

1. Montrer que P.G.C.D.$(a,\ b)$ = P.G.C.D.$(b,\ 10)$.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : P.G.C.D.$(a,\ b) = 5$.
3. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a et b sont premiers entre eux.
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre $\frac{a}{b}$ est un entier relatif.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\overrightarrow{E}$ un plan vectoriel de base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Pour tout couple $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ on définit l'application linéaire $f_{(a,\ b)}$ de $\overrightarrow{E}$ vers lui-même dont la matrice relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ s'écrit :

$$M_{(a,\ b)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Pour quelles valeurs de a et b, l'application $f_{(a,\ b)}$ est-elle bijective ?

   b. Dans le cas où elle ne l'est pas, déterminer le noyau et l'image de $f_{(a,\ b)}$. Donner une base de chacun d'eux.

   c. Pour quels couples $(a,\ b)$ ces deux espaces vectoriels sont-ils non supplémentaires ?
2. Quelles sont les application $f_{(a,\ b)}$ involutives ?
   Nature géométrique de $f_{(0,\ -1)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Quelles sont les applications $f_{(a,\ b)}$ vérifiant :

   $$f_{(a,\ b)} \circ f_{(a,\ b)} = f_{(a,\ b)}\ ?$$

   Nature de $f_{(0,\ 0)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME **12 POINTS**

On rappelle que l'ensemble F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'ensemble $\mathscr{C}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de F.

Partie A

Soit E l'ensemble des applications

$$f_{a,b} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_{a,b}(x) = \mathrm{e}^x(ax+b). \end{array}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ et que $\left(f_{0,1},\ f_{1,0}\right)$ est une base de E.

2. Montrer que la dérivée $f'_{a,\,b}$ de $f_{a,\,b}$ vérifie

$$f'_{a,\,b} = f_{a,\,b} + af_{0,\,1}.$$

En déduire :

a. que $f'_{a,\,b}$ appartient à E ;

b. une expression de la dérivée n-ième $f^{(n)}_{a,\,b}$ de $f_{a,\,b}$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) ;

c. une primitive de $f_{a,\,b}$.

Partie B

1. **a.** Soit φ un élément de $\mathscr{C}$. À tout élément f de $\mathscr{C}$, on associe l'élément g de F défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(On justifiera l'existence de g. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. On note U_φ l'application de $\mathscr{C}$ dans F définie par :

$$U_\varphi(f) = g.$$

Montrer que U_φ est une application linéaire de $\mathscr{C}$ dans F.

2. On suppose que

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi(x) = \sqrt{x^2+1} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & g(x) = x\mathrm{e}^x. \end{array}$$

Montrer l'existence d'une application unique f de $\mathscr{C}$ telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

3. On suppose que φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \neq 0$) et que g est une application dérivable telle que g' appartienne à $\mathscr{C}$ et que $g(0) = 0$.

Montrer l'existence d'une application f de $\mathscr{C}$ telle que $U_\varphi(f) = g$.

Partie C

1. On suppose que :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi(x) = \log\left(1+x^2\right) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & g(x) = \dfrac{x^3}{3}. \end{array}$$

Montrer l'existence d'une application f de $\mathscr{C}$ telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

2. Soit f la fonction

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = \dfrac{x^2}{\log\left(1+x^2\right)} \\ f(0) = 1 \end{array}$$

a. Étudier les variations de f. Pour déterminer le signe de la dérivée f' de f, on mettra f' sous la forme

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2x}{\left[log\left(1+x^2\right)\right]^2} \times \gamma(x)$$

et l'on précisera les variations de l'application γ pour en déduire le signe de $\gamma(x)$ pour $x > 0$.

b. Tracer la courbe Γ représentative de f dans le plan P rapporté au repère précédent. (On admettra que f est dérivable au point O et que $f'(0) = 0$.)

Partie D

φ étant une application de $\mathscr{C}$, on note Φ la primitive de φ qui s'annulé pour $x = 0$.

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

On veut déterminer un couple $(f,\ g)$ d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_{\varphi}(f) & = & g \\ g - f & = & \Phi. \end{array}\right. \qquad (1)$$

1. Montrer que f et f' vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x)[f(x) - 1] = f'(x). \quad (2)$$

2. On pose $h(x) = \mathrm{e}^{-\Phi(x)}(f(x) - 1)$.
Montrer que (2) est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0.$$

et en déduire les solutions de (2).

3. En déduire une solution de (1).