Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1985 [1]

EXERCICE 1 **4 points**

Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties

$$I_k = \int_0^k x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Étudier la limite de I_k quand k tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **4 points**

P est le plan orienté. On appelle « triangle équilatéral direct » tout triplet $(A,\ B,\ C)$ de points de P vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral}\\ \dfrac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de l'angle } \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).\end{array}\right.$$

On se donne un cercle (C) de centre O et de rayon R et une droite (D) ne coupant pas $(\mathbb{C})$.

1. Soit A un point de (D). On note (E_A) l'ensemble des points M de P vérifiant la propriété :
   « il existe un point N de (C) tel que le triplet $(A,\ M,\ N)$ soit un triangle équilatéral direct ».
   Montrer que (E_A) est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A. Construire (E_A).
2. Quel est l'ensemble des points Ω_A lorsque A décrit (D) ? Construire cet ensemble.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle
   $$X'' + 2X' + 2X = 0 \qquad (1)$$
   où X représente une fonction numérique de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer Les solutions f et g de (**??**) vérifiant :
   $$\left\{\begin{array}{lllllll} f(0) & = & 1 & & f'(0) & = & -1\\ g(0) & = & 0 & g'(0) & = & & 1\end{array}\right.$$

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

1. Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice

1. Montrer que, pour tout réel t : $-\mathrm{e}^{-t} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Qu'en déduit-on quant à la position relative des courbes représentatives C, Γ, Γ' des fonctions

$$t \longmapsto f(t)\ ; \qquad t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\ ; \qquad t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}\ ?$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; vérifier que, pour tout réel t :

$$f'(t) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

3. Déterminer les points communs à C et Γ, à C et Γ'.
Montrer qu'en ses points les tangentes aux deux courbes sont confondues.

4. Tracer les arcs des courbes $\mathbb{C}$, Γ, Γ' correspondant à $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisses ; 16 cm en ordonnées).

5. Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

Calculer $g(t)$ en fonction de $f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.
Déduire le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ 2\pi]$ du tableau de variations de f obtenu en .

Partie C

Le plan P est rapporté à un nouveau repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$, orthonormé (unité : 16 cm).
À tout réel t on associe le point $M(t)$ d'affixe $z(t) = f(t) + \mathrm{i}g(t)$, et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de $\mathscr{S}$.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point $M\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

- **a.** Placer A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente en A_0 à $\mathscr{S}$.
- **b.** Tracer l'arc $\overset{\frown}{A_0A_3}$ de $\mathscr{S}$, correspondant aux réels $t \in \left[0\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

  Préciser les points de cet arc où les tangentes à $\mathscr{S}$ sont parallèles aux axes.

2.

- **a.** Déterminer, en fonction de t, le module et un argument de $z(t)$.
- **b.** Prouver qu'il existe une similitude directe de centre O, dont on précisera les éléments, telle que, pour tout réel t : $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ soit l'image de $M(t)$.
- **c.** Quelle est l'image de l'arc de courbe $\overset{\frown}{A_nA_{n+1}}$ par cette similitude ?

3. On admet que tout arc $\overset{\frown}{A_nA_{n+1}}$ a une longueur ℓ_n, et qu'une similitude de rapport k transforme un arc de longueur ℓ en un arc de longueur $k\ell$.

- **a.** Calculer ℓ_n en fonction de ℓ_0 et de n ; en déduire la longueur L_n de $\overset{\frown}{A_0A_n}$.
- **b.** Étudier la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

4. On donne $\ell_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$.
Calculer ℓ_0 ; en déduire la valeur de la limite obtenue en).