

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1985 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'application F qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = u^2 z + u - 1 \quad \text{où } u \in \mathbb{C}.$$

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ radians ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport - 2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées,
4. Caractériser F lorsque $u = 1 - i$.

EXERCICE 2

4 points

On considère, dans le plan, deux droites D_1 et D_2 sécantes en O et une droite Δ qui n'est parallèle ni à D_1 ni à D_2 .

1.
 - a. Quel est l'ensemble des milieux des segments $[A_1A_2]$ tels que A_1 appartienne à D_1 A_2 appartienne à D_2 et tels que la droite (A_1A_2) soit parallèle à Δ .
 - b. Montrer qu'il existe une symétrie et une seule ayant pour direction Δ qui transforme D_1 en D_2 et préciser son axe.
2. Pour tout point M du plan on effectue la construction suivante :
la parallèle à D_2 passant par M coupe D_1 en P ,
la parallèle à D_1 passant par M coupe D_2 en Q ,
la parallèle à Δ passant par P coupe D_2 en Q' ,
la parallèle à Δ passant par Q coupe D_1 en P' ,
la parallèle à D_1 passant par Q' et la parallèle à D_2 passant par P' se coupent en M' .
Démontrer que l'application qui à tout point M du plan associe le point M' est une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.

PROBLÈME

12 points

Les parties B et C sont indépendantes entre elles.

On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1 + 2 \ln x}{x^2} \end{array} \right.$$

On considère par ailleurs la fonction

$$\begin{cases} \Phi:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

On désigne respectivement par (\mathcal{C}) et (\mathcal{H}) les courbes représentatives de f et Φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie A

Étude de la fonction f et tracé de la courbe (\mathcal{C}) .

1. Étudier le sens de variation de f .
2.
 - a. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition. Préciser les droites asymptotes à la courbe (\mathcal{C}) .
 - b. Étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à l'axe des abscisses, et donner une équation de la tangente à (\mathcal{C}) au point d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.
3. Tracer la courbe (\mathcal{C}) sur une feuille de papier millimétré (unité : 4 cm).

Partie B

Positions relatives des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{H}) et détermination d'une valeur approchée de l'abscisse de l'un des points d'intersection.

1.
 - a. Démontrer que la position relative des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{H}) peut se déduire du signe de $g(x) = (1 + 2 \ln x) - x$.
 - b. En utilisant les variations de la fonction g , prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$. On note α la solution appartenant à l'intervalle $]2; +\infty[$; justifier l'encadrement : $3 < \alpha < 4$.
 - c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x , et conclure sur la position relative des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{H}) .
2. On cherche une valeur approchée du nombre réel α défini précédemment.
 - a. Si on note h la fonction définie par : $h(x) = 1 + 2 \ln x$, vérifier que les équations $g(x) = 0$ et $h(x) = x$ sont équivalentes. Préciser le sens de variation de h .
 - b. On considère les nombres réels x' et x'' tels que : $1 < x' < \alpha < x''$, montrer que l'on a : $x' < h(x') < \alpha < h(x'') < x''$.
En déduire que l'on peut définir deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que l'on ait :
 $u_0 = 3$ et pour tout n élément de \mathbb{N} , $u_{n+1} = h(u_n)$,
 $v_0 = 4$ et pour tout n élément de \mathbb{N} , $v_{n+1} = h(v_n)$.
 Établir les propriétés suivantes :
 - la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante,
 - la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante,
 - pour tout n élément de \mathbb{N} , $u_n < \alpha < v_n$
 - les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
 - c. Vérifier que pour tout x élément de $]3; +\infty[$, on a : $0 < h'(x) \leq \frac{2}{3}$, et en déduire : pour tout n élément de \mathbb{N} , $h(v_n) - h(u_n) \leq \frac{2}{3}(v_n - u_n)$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Quelle est la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- d. Donner un encadrement de α d'amplitude inférieure à 10^{-1} et proposer une valeur approchée de α .
3. Tracer la courbe (\mathcal{H}) sur le même graphique que la courbe (\mathcal{C}).

Partie C

Calcul d'une primitive de f et calcul d'aires.

1. Justifier l'existence de primitives de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^n f(x) dx$.
Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite; donner une interprétation du résultat.
3. Calculer, en centimètres carrés, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}), la courbe (\mathcal{H}) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$ (où α est le nombre réel défini en B 1. b.)
Montrer que cette aire s'exprime rationnellement en fonction de α , puis en donner une valeur approchée.