Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1985 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan, on considère le parallélogramme KMLN et le point de concours O de ses diagonales (MN) et (KL).
Soit A un point de la droite (KN), distinct de K et de N.
Soit B le point d'intersection de la droite (MA) et de la droite (LN).
P et Q sont respectivement les projetés, parallèlement à la droite (MN), de A sur la droite (KM) et de B sur la droite (LM).

1. Faire une figure.
2. a. On note h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{\overline{\text{KA}}}{\overline{\text{KN}}}$.
Démontrer que $h(\text{M}) = \text{P}$.
En déduire que le milieu I du segment [AP] appartient à la droite (KL).
   b. Indiquer l'homothétie qui permettrait de démontrer que le milieu J du segment [BQ] appartient à la droite (KL).
3. Justifier que les points N, P, Q sont les images respectives des points M, A, B par une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.
En déduire que les points N, P, Q sont alignés.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan rapporté à une repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C deux à deux distincts dont les affixes respectives sont les nombres complexes a, b, c.

1. M étant le point du plan d'affixe z, exprimer, en fonction de z :
   a. l'affixe z' du point M' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{3}$ (en radians) ;
   b. l'affixe z'' du point M'' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$ (en radians).
2. Que peut-on dire du triangle ABC si les nombres complexes a, b, c vérifient
   a. $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$;
   b. $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} - \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$.
3. Établir que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

PROBLÈME **12 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions numériques g, dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$(1) \qquad \text{pour tout nombre réel } x, \quad g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1},$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Déterminer l'unique fonction affine g_0 vérifiant (1).
2. On note h la fonction : $h = g - g_0$; démontrer que g vérifie (1) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle (2) $\quad y' - y = 0$.
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) et en déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant (1).
   Déterminer la fonction vérifiant (1) qui s'annule en zéro.

Partie B

1. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
   $$f(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}.$$
   On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   a. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
   b. Étudier le sens de variation de f et les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.
   Montrer que la courbe (C) admet une droite asymptote que l'on précisera.
   c. Utiliser les variations de f pour déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
   d. Tracer la courbe (C) sur une feuille de papier millimétré (en prenant 2cm pour unité de longueur).
2. On considère la fonction numérique Φ de la variable réelle x définie par :
   $$\Phi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}.$$
   On désigne par (Γ) la courbe représentative de Φ dans le plan rapporté au même repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   a. Étudier le sens de variation de Φ et les limites de Φ aux bornes de l'intervalle de définition.
   Montrer que la courbe (Γ) admet une droite asymptote que l'on précisera.
   b. Etudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).
   c. Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe (C). rX+1
3. Établir que pour tout nombre réel x : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.
   Donner une interprétation géométrique de $\Phi(0)$.

4. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a. Démontrer que : $f(n) \leqslant \Phi(n) \leqslant f(n+1)$.
En déduire l'existence d'un unique réel un élément de l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$ tel que

$$\Phi(n) = f\left(u_n\right).$$

b. À l'aide des courbes (C) et (Γ), représenter sur l'axe des abscisses les points d'abscisses respectives u_1 et u_2.

c. On considère la suite de terme général$v_n = u_n - n$ où n est élément de $\mathbb{N}^\star$.
Montrer que la suite (v_n) est bornée.
Établir que v_n vérifie l'égalité $\dfrac{\mathrm{e}^{v_n}}{\mathrm{e}-1} = 1 - \dfrac{1}{2\mathrm{e}^n} + \dfrac{v_n}{\mathrm{e}^n}$.
En déduire que la suite (v_n) admet une limite que l'on déterminera.