Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1985 Antilles–Guyane ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2.$$

1. Étudier la fonction f ; tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$orthonormé.
2. a. À l'aide d'une double intégration par parties, calculer :

$$\int_1^{\lambda} f(x)\,\text{d}x \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel supérieur à 1.}$$

   b. Déterminer l'aire de la portion du plan, ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & \text{e} \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère une droite $\mathcal{D}$ et un point S non situé sur $\mathcal{D}$. Sur la droite Δ perpendiculaire en S au plan $\mathcal{P}$, on considère un point A fixe distinct de S. B et C sont deux points variables de $\mathcal{D}$ tels que les droites (SB) et (SC) soient perpendiculaires.

1. Démontrer que la somme $\text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \text{BC}^2$ est constante.
2. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan (ABC). Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Dans le triangle ABC, les hauteurs issues de A, B et C coupent les côtés opposés respectivement en A_1, B_1 et C_1.
   Montrer que A_1 est un point fixe.
   Montrer que, dans le plan (ABC), B_1 et C_1 appartiennent au cercle Γ de diamètre [AH], privé des points A et H.
   Réciproquement, montrer que, quel que soit le point B_0 de Γ, on peut définir des points B et C sur $\mathcal{D}$ tels que (BB_0) soit la hauteur issue de B, et que les droites (SB) et (SC) soient perpendiculaires.

EXERCICE 2 **4 points**

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté Σ, des points de l'espace équidistants de deux droites D et D′ non coplanaires et orthogonales.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\text{R} = \left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
La droite D passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
La droite D' passe par le point B de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,-1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1. Vérifier que D et D$'$ sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point O appartient à Σ.

2. Montrer qu'une représentation paramétrique de D est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t \qquad t \in \mathbb{R}\\ z &=& 1\end{array}\right.$$

Soit M un point de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$. Calculer la distance de M à la droite D.

3. Calculer de même la distance de M à la droite D$'$.

4. En déduire que M appartient à Σ si et seulement si on a :

$$xy + 2z = 0.$$

5. Déduire de cette relation :

a. Que les intersections de Σ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.

b. La nature des intersections de Σ avec des plans orthogonaux à l'axe $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\right)$ ou à l'axe $\left(\text{O}\,;\ \vec{\jmath}\right)$.