**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C 1985 Groupement 3 [1]

**EXERCICE 1** **5 points**

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan, $\text{A}_0$ le point d'affixe 6 et $s$ la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour $n = 0, 1, \ldots, 12$.

1. Déterminer en fonction de $n$ l'affixe du point $A_n$ et vérifier que $A_{12}$ appartient à la demi-droite $\left(\text{O}, \vec{\imath}\right)$.
2. Établir que le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_{n+1}$. Représenter les points $\text{A}_0, A_1, \ldots, A_{12}$ (on ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments $\text{OA}_0, \text{O}A_1, \ldots, \text{O}A_{12}$ et $\text{A}_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{11}A_{12}$.
3. Calculer la longueur du segment $\text{A}_0A_1$. En déduire la longueur $\ell$ de la ligne polygonale $\text{A}_0A_1A_2\ldots A_{12}$.
   Donner une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près.

**EXERCICE 2** **5 points**

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R (R > 0) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.

1. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, distinct de A et B, on construit le point Q tel que MABQ soit un parallélogramme.
   Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [MQ], puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BMQ lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.
2. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM).
   Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ?
   Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.
3. On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP.
   **a.** Pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents en P ?
   **b.** On note K l'autre point commun de ces deux cercles. En utilisant les angles orientés de droites égaux à $\left(\widehat{\text{KB}, \text{KP}}\right)$ et $\left(\widehat{\text{KP}, \text{KM}}\right)$, montrer que les points K, A, B, M sont cocycliques.

**PROBLÈME** **10 points**

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions $f_\lambda$ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$$

où $\lambda$ est un nombre réel non nul.
La partie I est essentiellement consacrée à la recherche du nombre de points d'intersection de la courbe représentative $\mathscr{C}_\lambda$ de $f_\lambda$, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$,

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. La partie II donne une méthode de calcul approché de l'abscisse de ces points dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

### I.

**1.** Donner l'ensemble de définition de $f_\lambda$ (on distinguera les deux cas : $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).

**2.** **a.** Existe-t-il un lien entre les deux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}_{-\lambda}$ ?

**b.** Soit $\Gamma$ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme $\Gamma$ en $\mathcal{C}_\lambda$.

**3.** On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

**a.** On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{D}$.

**b.** On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre $x$ en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini).

Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand $x$ décrit le domaine de définition de $\varphi_\lambda$, est $m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.

**c.** Étudier, quand $\lambda$ décrit $]0~;~+\infty[$, les variations de $m(\lambda)$ ; en déduire son signe.

**d.** Combien, lorsque $\lambda$ est positif, $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{D}$ ont-elles de points communs ?

### II. Étude du cas particulier : $\lambda = 1$

**1.** **a.** Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_1$ et la droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ; on prendra comme unité 3 cm.

**b.** On appelle P et Q les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{D}$. P est le point d'abscisse négative $p$, Q le point d'abscisse positive $q$.

Démontrer que : $2 < q < 3$.

**2.** On se propose de calculer une valeur approchée de $q$. On définit la suite $u$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f_1(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ de } N. \end{array}\right.$$

**a.** Représenter à l'aide de la courbe $\mathcal{C}_1$ les termes $u_0, u_1, u_2$ sur $\left(\text{O}, \vec{\imath}\right)$.

**b.** Montrer que la suite $u$ est croissante et majorée par $q$.

**c.** Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis, que :

$$q - u_{n+1} \leqslant \frac{q - u_n}{3} \quad \text{pour tout } n \text{ de } N.$$

**d.** En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $q - u_n \leqslant \dfrac{q - u_0}{3^n}$ et que la suite $u$ converge vers $q$.

**e.** Déterminer une valeur approchée de $q$ à $10^{-2}$ près en justifiant la méthode choisie.

**3.** L'unité d'aire étant le cm$^2$, calculer en fonction de $p$ et de $q$ l'aire comprise entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{D}$ et les droites d'équations $x = p$ et $x = q$.