Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger groupe I septembre 1985

EXERCICE 1 **5 points**

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, et G l'isobarycentre des points A, B, C.

1. Soit G′ le symétrique de G par rapport à la droite (BC).
Déterminer des nombres réels b et c pour que G′ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1, b, c ?

2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

Vérifier que les points B et C appartiennent à E.

EXERCICE 2 **6 points**

On se propose d'étudier le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par la relation :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

1. Justifier l'encadrement, valable pour $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x.$$

Prouver que $\dfrac{S_n}{n^{\frac{2}{3}}}$ admet une limite finie a que l'on déterminera.

3. On pose $u_n = S_n - an^{\frac{2}{3}}$.
En utilisant les encadrements précédents, montrer que la suite (u_n) est bornée et décroissante.
Prouver enfin que cette suite est convergente.

PROBLÈME **9 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction qui, à tout nombre réel x différent de -2 associe

$$f(x) = \frac{x}{2+x}$$

et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. Déterminer des nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x différent de -2

$$f(x) = a + \frac{b}{2+x}$$

2. En déduire la nature géométrique de $\mathscr{C}$, préciser ses éléments de symétrie et construire $\mathscr{C}$.
3. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -4$ et $x = -3$.
4. On appelle A, B, O$'$, les points de coordonnées respectives $(-1\,;\,-1)$, $(-4\,;\,2)$, $(-3\,;\,3)$.
   Évaluer l'aire S du domaine OABO$'$ délimité par les droite (OO$'$), (AB) et par $\mathscr{C}$.

Partie B

À tout nombre complexe z différent de -2, on associe

$$z' = \frac{z}{2+z}.$$

1. Montrer que cette application est une bijection de $\mathbb{C} - \{-2\}$ sur un ensemble E que l'on précisera.
2. Soit A le point d'affixe -2 et F l'application qui à tout point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = x' + \mathrm{i}y'$.
   a. Calculer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels z' est réel.
   c. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels la partie réelle x' de z' est nulle.
3. **a.** Quelle relation y a-t-il entre les modules et les arguments de $z' - 1$ et $z + 2$?
   b. Déterminer l'image $\mathscr{C}'$ par F du cercle $\mathscr{C}_r$ de centre A et de rayon r, où $r > 0$.
   c. Déterminer l'image D'_α par F de la droite D_α passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha,\, \sin\alpha)$, privée de A.
   d. Dessiner sur une même figure les cercles $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ et les droites D_0, $D_{\frac{\pi}{4}}$, $D_{\frac{\pi}{2}}$, $D_{\frac{3\pi}{4}}$.
   Dessiner sur une autre figure les transformées par F de ces cercles et de ces droites.