

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Groupe 1 juin 1985 ∞

EXERCICE 1

5 points

1. Exprimer les racines z_k dans \mathbb{C} de l'équation $z^5 = 1$ en fonction des nombres $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$, où $0 \leq k \leq 4$.
2. Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixe z_k ? Déterminer l'isobarycentre des points A_k .
En déduire une équation du second degré à coefficients entiers satisfaite par $a = \cos \frac{2\pi}{5}$.
3. Résoudre cette équation ; calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{8\pi}{5}$.
4. À tout nombre complexe u , différent de -1 , on associe $z = \frac{u-1}{u+1}$.
Calculer u en fonction de z .
5. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(u-1)^5 = (u+1)^5.$$

Dessiner les affixes des racines.

EXERCICE 2

5 points

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan P.

On désigne par s la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) et on pose $D = s(B)$.

Soit enfin f l'unique application affine de P dans lui-même telle que

$$f(A) = A, f(B) = C, \text{ et } f(C) = D.$$

1. On pose $g = s \circ f$.
 - a. Déterminer l'image par g des points A, B, C et du milieu I du segment [BC].
 - b. Établir que g est une symétrie dont on précisera l'axe Δ et la direction.
 - c. Exprimer f en fonction de g et de s ; en déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point M du plan par f .
2. Comment faut-il choisir A, B et C pour que f soit une isométrie? Expliciter alors cette isométrie.

PROBLÈME

5 points

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par la relation

$$f(x) = \frac{1-x}{3} e^x.$$

On se propose d'étudier un algorithme d'approximation de la solution a de l'équation $f(x) = x$.

1. Étude de f .
 - a. Étudier le sens de variation de f , et tracer l'allure de sa courbe représentative (unité graphique : 4 cm).
 - b. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une solution a et une seule appartenant à $[0; 1]$.
 - c. Déterminer l'image de $[0; 1]$ par f ; en déduire que $a \in [0; 1]$
2. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = \frac{1}{3}$.
 - a. Prouver que, pour tout entier n , u_n appartient à $[0; 1]$.
 - b. Montrer que $u_1 \leq a$; en déduire que :

$$|u_0 - a| \leq u_0 - u_1 \leq 2,5 \cdot 10^{-2}.$$

- c. Établir, par récurrence sur p , que pour tout p , $u_{2p+1} \leq a \leq u_{2p}$.
3. Convergence de (u_n) vers a .
 - a. Démontrer que, pour tout élément x de $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, $-0,16 \leq f'(x) \leq 0$.
En déduire que : $|f(x) - f(a)| \leq 0,16|x - a|$.
 - b. Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$|u_n - a| \leq (0,16)^n |u_0 - a|.$$

En déduire que (u_n) converge vers a .

- c. Calculer une valeur décimale approchée de a avec la précision 10^{-3} . Déterminer un entier p tel que $|u_p - a| \leq 10^{-12}$ (on ne demande pas de calculer u_p).