

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie ∞
novembre 1985

EXERCICE 1

4 points

1. a. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^3 - 1 = 0.$$

- b. En déduire un polynôme du second degré de la forme $z^2 + bz + c$, (b et c sont des nombres réels), ayant pour zéros les racines cubique de l'unité non réelles.
2. Étant donné un nombre complexe z , on pose $\varphi(z) = z^2 + z + 1$.
Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , l'unité de longueur étant 3 cm.
- a. Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit réel.
- b. Démontrer que l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur est une conique dont on précisera une équation réduite.
- c. Représenter sur une même figure les ensemble E_1 et E_2 ; déterminer les affixes des points de $E_1 \cap E_2$.

EXERCICE 2

5 points

On considère dans l'espace E , un carré $ABCD$, de centre O et de côté a , contenu dans un plan P .

Soient S un point de E n'appartenant pas au plan P et A', B', C', D' les milieux respectifs des segments $[SA], [SB], [SC], [SD]$.

1. Démontrer que :
- a. les points A', B', C', D' appartient à un même plan P' parallèle au plan P et $P' \neq P$;
- b. le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré; on note O' son centre;
- c. les points S, O, O' sont alignés.

Dessiner un croquis de la figure ainsi obtenue.

2. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan P tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2.$$

Déterminer l'ensemble décrit par le milieu M' du segment SM quand le point M décrit l'ensemble Ω .

PROBLÈME

11 points

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2-1} dt.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

Partie I

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction F et de sa courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 4 cm.

1. Étudier la parité de F .
2. Montrer que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer sa dérivée; en déduire la sens de variation de F sur $[0; +\infty[$.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$, $F(x) \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$.
En déduire la position de \mathcal{C} par rapport à la tangente au point d'abscisse nulle.
4.
 - a. Prouver que pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq e^{-2x}$.
En déduire que F est bornée sur $[0; +\infty[$.
 - b. On admettra que les résultats acquis aux I 2. et I 4. a. permettent de conclure que F possède une limite λ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\lambda \leq \frac{1}{2}$.
 - c. Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C} .

Partie II

On se propose maintenant d'étudier la fonction numérique G définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2-1} dt.$$

1. Exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F .
2. Démontrer que G est dérivable et calculer sa dérivée G' .
3. Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2xe^{-x^4+x^2} - 1.$$

- a. Étudier les variations de φ .
- b. Démontrer l'existence de deux réels α_1 et α_2 vérifiant :

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 < \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} \\ 1 < \alpha_2 < 2 \\ \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = 0. \end{cases}$$

- c. En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $\varphi(x)$.
 - d. Exprimer $G'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$; en déduire le tableau de variations de G .
4.
 - a. Trouver deux solutions distinctes et positives, x_1 et x_2 , de l'équation $G(x) = 0$.
 - b. Soit Γ la courbe représentative de G . On désigne par M_1 (resp. M_2) le point de Γ d'abscisse x_1 (resp. x_2); écrire une équation de la tangente à Γ en M_1 (resp. M_2).
 - c. Tracer Γ ; (rappel : l'unité graphique est 4 cm).