Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris–Créteil–Versailles septembre 1985

EXERCICE 1 **4 points**

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$z^3 + (1-8\text{i})z^2 - (23+4\text{i})z - 3 + 24\text{i} = 0.$$

   a. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer ;

   b. Achever la résolution de l'équation (E).

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, représenter les points A, B et C d'affixes respectives $1+2\text{i}$, 3i, $-2+3\text{i}$.

   Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2, 1.

   Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{GA}}$, $\overrightarrow{\text{OB}}$, $\overrightarrow{\text{OC}}$.

   Montrer qu'elles forment une suite géométrique dont on déterminera la raison complexe.

   En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit ABC un triangle (de sens direct) ayant ses trois angles aigus.

1. Construire les cercles $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ et $\mathcal{C}_c$ tels que :

   $\mathcal{C}_a - \{\text{C, B}\}$ soit l'ensemble des points P tels que mes $\left(\widehat{(\text{PC}), \text{PB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

   $\mathcal{C}_b - \{\text{A, C}\}$ soit l'ensemble des points Q tels que mes $\left(\widehat{(\text{QA}), \text{QC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

   $\mathcal{C}_c - \{\text{B, A}\}$ soit l'ensemble des points R tels que mes $\left(\widehat{(\text{RB}), \text{RA}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

   (on pourra utiliser les triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC et dont un côté est [CB], [AC] ou [BA]).

   Démontrer que $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ et $\mathcal{C}_c$ ont un point commun, noté I.

2. Soit P un point de $\mathcal{C}_a$ extérieur au triangle ABC. La droite (PC) recoupe $\mathcal{C}_b$ en un point Q. Soit R le point d'intersection des droites (QA) et (PB). Montrer que R est un point de $\mathcal{C}_c$.

   Quelle est la nature du triangle PQR ?

3. À chaque triangle PQR on associe :

$$\ell(\text{QR}) = \text{IP} + \text{IQ} + \text{IR}.$$

   a. Déterminer P pour que IP soit maximum. Soit P_0 ce point.

   Construire le triangle $\text{P}_0\text{Q}_0\text{R}_0$ obtenu à partir de P_0.

   b. Montrer que I(PQR) est maximum pour $\text{P}_0\text{Q}_0\text{R}_0$.

N.B. - La notation $\left(\widehat{\Delta,\ \Delta'}\right)$ désigne l'angle du couple de droites $(\Delta,\ \Delta')$.
On note mes$\left(\widehat{\Delta,\ \Delta'}\right)$ l'image de cet angle par la mesure choisie pour cet exercice, qui a pour ensemble $[0\ ;\ \pi[$.

PROBLÈME **12 points**

Le but du problème est l'étude d'une fonction définie par une intégrale qu'on ne sait pas calculer explicitement.

On considère la fonction numérique f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{x}{x-1} \quad \text{pour tout } x \text{ non nul}\end{array}\right.$$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie A

1. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^{\star}$, et calculer $f'(x)$ pour tout x non nul.
   c. On rappelle que pour tout réel x,

   $$\mathrm{e}^{x} - x - 1 = x^2\left(\frac{1}{2} + \epsilon(x)\right).$$

   où ϵ est une fonction de limite nulle en zéro.
   Montrer que pour tout x non nul : 1

   $$\frac{f(x)-1}{x} = -\frac{\frac{1}{2}+\epsilon(x)}{1+\frac{1}{2}x + x\epsilon(x)}.$$

   En déduire que $\dfrac{f(x)-1}{x}$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 0.
   Interpréter ce résultat.
2. **a.** On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$g(x) = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1.$$

   Étudier le sens de variation de g, puis le signe de g. En déduire, pour tout x non nul, le signe de $g'(x)$.
   b. Achever l'étude des variations de f
   c. Préciser les droites asymptotes à $\mathcal{C}$ et construire $\mathcal{C}$ (on donnera des valeurs approchées de $f(-1)$, $f(\ln 3)$, $f(2\ln 3)$ à 10^{-3} près).

Partie B

1. **a.** Justifier, pour tout réel x, l'existence de

   $$H(x) = \int_{x}^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On a donc défini une fonction H de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il ne s'agit en aucun cas de « calculer » $H(x)$. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction H dans un repère orthonormé.

b. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Exprimer H au moyen de F. En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x non nul, on a

$$H'(x) = \frac{x}{e^{2x}-1}\left(3-e^{x}\right).$$

c. Étudier le sens de variation de la fonction H.

2. **a.** Montrer, en utilisant l'inégalité de la moyenne, que si x est non nul $H(x)$ est compris entre $f(x)$ et $f(2x)$ (distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$).

b. Étudier la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Étudier la limite $\dfrac{H(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$; en déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

d. Interpréter les résultats précédents pour la courbe Γ.

3. Quelle aire représente $H(\ln 3)$?

Déterminer un encadrement de $H(\ln 3)$ par la méthode des rectangles en utilisant la subdivision $\left(\ln 3,\ \frac{4}{3}\ln 3,\ \frac{5}{3}\ln 3,\ 2\ln 3\right)$.

On utilisera des valeurs approchées à 10^{-3} près des images par f des termes de la subdivision donnée.

4. Donner, en tenant compte des résultats précédents le tableau de variation de H, puis indiquer l'allure de Γ.

Certains calculs nécessitent l'utilisation d'une calculatrice électronique.
Les courbes des parties A et B seront tracées sur du papier millimétré dans deux repères orthonormés différents.