Durée : 4 heures

Baccalauréat C Polynésie juin 1985

EXERCICE 1 **points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.
La médiatrice de [BC] coupe (Γ) en A et D ; on appelle A$'$ le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Démontrer que A$'$ est le symétrique de A par rapport à C.
2. On désigne par S_{BD}, S_{DC}, S_{CA}, S_{AB} les symétries orthogonales par rapport aux droites (BD), (DC), (CA), (AB) respectivement.
   a. Quelle est la nature des applications $\text{S}_{\text{BD}}\circ \text{S}_{\text{DC}}$ et $\text{S}_{\text{CA}}\circ \text{S}_{\text{AB}}$? On précisera les éléments caractéristiques.
   b. Soit Δ la parallèle à (DC) menée par A et S_{Δ} la symétrie orthogonale par rapport à Δ.
   Démontrer que
   $$\text{S}_{\text{BD}}\circ\text{S}_{\text{DC}} = \text{S}_{\text{DC}}\circ\text{S}_{\text{DA}} \quad \text{et} \quad \text{S}_{\text{CA}}\circ\text{S}_{\text{AB}} = \text{S}_{\text{DA}}\circ\text{S}_{\Delta}.$$
   c. Retrouver le résultat du 1 en utilisant l'application
   $$t = \text{S}_{\text{BD}}\circ\text{S}_{\text{DC}}\circ\text{S}_{\text{CA}}\circ\text{S}_{\text{AB}}$$
   que l'on caractérisera.

EXERCICE 2 **points**

On appelle E le plan complexe privé du point A d'affixe i.

1. Démontrer que la relation : $zz' - \text{i}(z+z') - 2 = 0$ définit une application f de E dans E qui à tout point M d'affixe z associe l'image $M' = f(M)$ d'affixe z'.
2. Vérifier que l'application f est involutive.
   Déterminer les points de E invariants par f.
3. On appelle B l'image par f du point O.
   Établir les égalités suivantes :
   $$\text{O}M' = \frac{M\text{B}}{M\text{A}}, \quad \text{O}M = \frac{M'\text{B}}{M'\text{A}}.$$
4. Soit (Γ) l'ensemble des points M de (E) tels que $\dfrac{M\text{B}}{M\text{A}} = \sqrt{2}$. Quelle est la nature de (Γ) ?
   Vérifier que (Γ) passe par les points invariants de f et par le point d'affixe $\text{i}\sqrt{2}$.
   Soit $\left(\Gamma'\right)$ l'image de (Γ) par f ; établir que $\left(\Gamma'\right) = (\Gamma)$.