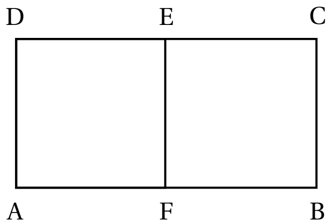
Durée : 4 heures

Baccalauréat C Strasbourg septembre 1985

EXERCICE 1 **4 points**

Sur la figure ci-dessous dans le plan orienté, AFED est un carré de côté 1 tel que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right)$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $\ell (\ell > 1)$ la longueur du segment [AB] (du rectangle ABCD).

1. On suppose qu'il existe une similitude directe f transformant respectivement A, B, C, D en B, C, E, F.



Établir qu'alors $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (On suppose dans toute la suite que ℓ a cette valeur.)

2. Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?
Montrer que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (EB) ; on pourra utiliser $f \circ f$.
3. À tout point M d'affixe complexe z dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AF}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ on fait correspondre le point $g(M)$ d'affixe :

$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{i}z + \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Montrer que g est une similitude dont on donnera le centre, l'angle, le rapport.
Quelles sont les images par g de A, B, C, D ?

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les deux cercles (C) et (C$'$) de même centre O et de rayons respectifs R et R$'$ (R > R$'$).
Soit D la demi-droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \cos\varphi\overrightarrow{\imath} + \sin\varphi\overrightarrow{\jmath}$ (φ réel quelconque) et soit D$'$ la demi-droite image de D dans la symétrique orthogonale par rapport à $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$; D coupe (C) en M et D$'$ coupe (C$'$) en M$'$.

1.
   a. Calculer les coordonnées de M et M$'$ en fonction de R, R$'$ et φ.
   b. Quel est l'ensemble (E) des points P milieux des segments [MM$'$] lorsque φ varie ?
   c. Montrer que la tangente en P à (E) est orthogonale à (MM$'$).
   d. Quelle relation doivent vérifier R et R$'$ pour que la courbe (E) soit tangente au cercle (C$'$) ?
2. Dans cette question on prend R = 6 cm et R$'$ = 2 cm.
   a. Faire une figure soignée de (E), (C), (C$'$).

b. Trouver une affinité orthogonale f d'axe $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et de rapport positif telle que (E) soit l'image de (C′) par f.
On désigne par f^{-1} l'affinité réciproque de f et par r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit P′ l'image de P par $f \circ r \circ f^{-1}$.
Démontrer que P′ appartient à (E) et que

$$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OP}'^2 = 20.$$

PROBLÈME **11 points**

Les parties A, B, C sont largement indépendantes

Partie A

On se propose de déterminer les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2.$$

1. Déterminer une fonction polynôme du second degré g, solution de (E).
2. Démontrer que φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}') \qquad y'' + 2y' + y = 0.$$

3. Résoudre (E′). En déduire l'ensemble des fonctions φ solutions de (E). Déterminer celle de ces solutions dont la représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ passe par O et admet comme tangente en O la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath}\right)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x + 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier le sens de variation de f et les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
On considère la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f et la courbe $(\mathscr{P})$ représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 2x.$$

   a. Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$ et préciser leur intersection.
   b. Vérifier que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ sont deux courbes asymptotes quand x tend vers $+\infty$.
   c. Construire les courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   d. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{P})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$. (λ réel strictement positif). Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie C

1. On se propose d'étudier dans cette question l'équation $f(x) = x$.

a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x - 3 + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

Étudier ses variations (on ne demande pas sa représentation graphique) et en déduire que l'équation $h(x) = 0$ a deux solutions, l'une positive α, l'autre négative β ; à l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

b. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = x$?

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad u_n > 3$.

Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Cette suite est-elle convergente ?