

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix-Marseille<sup>1</sup> septembre 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right] \\ f(x) = \frac{4}{e^2} & \text{pour } x \in \left] -\frac{1}{2} ; 1 \right] \\ f(x) = \frac{4}{e^2} + \ln x & \text{pour } x \in [1 ; +\infty[ \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Tracer la courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = 2$ .

EXERCICE 2

4 points

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $T$  l'application de P dans P qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = (1 + i)z - i.$$

1. Montrer que  $T$  est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.  
On notera A le point invariant de T.  
Donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$ , en supposant  $M \neq A$ .
2. a. Construire  $M'$  pour un point  $M$  donné.  
b. Déterminer l'image  $D'$  par  $T$  de la droite  $D$  d'équation  $y = x$ . Construire  $D'$ .
3. a. Montrer qu'il existe un point B du plan, distinct de A, et un seul, tel que les affixes  $z_0$  de B et  $z'_0$  de  $B' = T(B)$  soient liées par la relation :

$$z_0 z'_0 = 1.$$

Mettre en place B et B'.

- b. Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques.

PROBLÈME

12 points

Étude de la cissoïde de Dioclès

A.

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}.$$

---

1. Montpellier, Toulouse, Corse, Nice

1. Dresser le tableau des variations de  $f$ .
2. Soit  $\Gamma_1$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $T$  à la courbe  $\Gamma_1$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$ .  
Tracer la courbe  $\Gamma_1$  et la droite  $T$ .
3. Sur le même graphique, tracer  $\Gamma_2$  courbe symétrique de  $\Gamma_1$  dans la symétrie orthogonale d'axe  $Ox$ .
4. Soit  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Montrer que  $\Gamma$  a pour équation cartésienne :

$$x(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \quad (E)$$

$\Gamma$  est appelée cissoïde de Dioclès.

### B. Interprétation géométrique de (E).

$I$  est le point de coordonnées  $(1; 0)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 $C$  est le cercle de diamètre  $[OI]$  et  $\Delta$  est la tangente à  $C$  au point  $I$ .  
Soit  $D$  la droite passant par  $O$  de coefficient directeur  $t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer les coordonnées de  $M$  tel que  $C \cap D = \{O, M\}$ . Déterminer les coordonnées de  $M'$  tel que  $\Delta \cap D = \{O, M'\}$ .  
Déterminer les coordonnées de  $N$  tel que  $\Delta \cap D = \{N\}$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$ .
3. Déterminer l'intersection de  $\Gamma$  et  $C$ .

### C. Propriétés géométriques

Soit  $M$  un point de  $C$ ,  $N$  le point d'intersection de  $(OM)$  et  $\Delta$  et  $M'$  le point d'intersection de  $(OM)$  et  $\Gamma$ .

On considère le point  $P$  tel que  $OINP$  soit un rectangle.

1. Montrer que les triangles  $IMN$  et  $OM'P$  se transforment par une symétrie centrale à déterminer.
2. En déduire que le triangle  $PM'N$  est rectangle.
3. Soit  $F$  le symétrique de  $I$  par rapport à  $O$ . On considère la parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F$  et de directrice  $\Delta$ . La droite  $(FP)$  coupe  $\Delta$  en  $R$ .  
Construire géométriquement le point  $K$  de  $\mathcal{P}$  qui se projette orthogonalement en  $R$  sur  $\Delta$ .
4. Démontrer que la droite  $(PM')$  est tangente en  $K$  à  $\mathcal{P}$ .
5. Démontrer réciproquement que si  $K$  est un point de  $\mathcal{P}$ , la projection orthogonale de  $O$  sur la tangente en  $K$  à  $\mathcal{P}$  est un point  $M'$  de  $\Gamma$ .

*Remarque:*  $\Gamma$  apparaît comme ensemble des projections orthogonales du sommet d'une parabole sur les tangentes à cette parabole. On dit pour cela que la cissoïde de Dioclès est la podaire d'une parabole par rapport à son sommet.