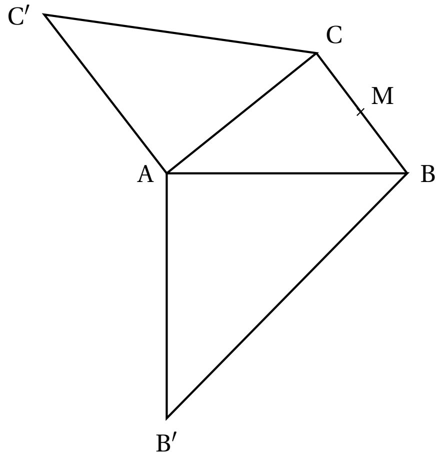
Baccalauréat C groupe 4 [1] juin 1986

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment [BC].
Les triangles BAB′ et CC′A sont rectangles et isocèles directs de sommet A. Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et (B′C′) sont perpendiculaires et que B′C′ = 2 AM.



1. **Méthode géométrique**
   a. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminer les images des points A et M par h.
   Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B′ et M en C′.
   b. En déduire que les droites (AM) et (B′C′) sont perpendiculaires et que B′C′ = 2AM.
2. **Utilisation des nombres complexes**
   Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lesquels B et C ont pour affixes respectives b et c.
   a. Calculer les affixes m, b' et c' des points M, B′ et C′.
   b. Retrouver alors les résultats de la question 1. b.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On donne dans le plan deux points fixes F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1. **a.** Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E ?
   b. Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B′ de l'ellipse E appartenant à D.
2. **a.** Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E ; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont un déterminera la directrice .
   b. Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B.

PROBLÈME **10 POINTS**

I.

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

1. Étudier la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'x,\ y'y$.

2. Pour tout x réel on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.

b. Montrer que F est impaire.

c. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Déduire de cette inégalité que F(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3. x étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

a. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier l'affirmation suivante :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* \ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x}.$$

c. Déduire de I. 3. a. et I. 3. b. que l'on peut affirmer : pour tout x de R : $G(x) \leqslant \ln 2$.
(On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale).

d. Déduire de I. 3. a. et I. 3. c. que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L, limite quand x tend vers plus l'infini de $G(x)$.

e. Montrer que G est une fonction impaire.

f. Déduire de I. 3. d. et I. 3. e. que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers plus l'infini. Exprimer cette limite en fonction de L.

II.

On considère la fonction φ :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \end{array} \right.$$

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ.

b. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.

c. Déduire de II. 1. b. une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au I. 3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question I. 3. d.

2. On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a. Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right].$$

(On rappelle que, par II. 1.b. ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.)

b. Étudier les branches infinies de Γ. Reconnaître d'éventuelles asymptotes à Γ.

c. Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine.
(On pourra étudier la variation de $h : x \longmapsto F(x) - x$).

d. Tracer Γ.

3. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ, l'axe $x'x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

III.

Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & F\left(u_n\right). \end{array}\right.$

1. Montrer par récurrence que tous les termes de (u_n) son strictement positifs.

2. Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?