

œ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1986 œ

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit le polynôme

$$P(z) = z^3 - 4z + \lambda$$

où z désigne un nombre complexe et λ un nombre réel.

1. Montrer que si $P(z) = 0$ admet une racine complexe z_θ , alors $\overline{z_\theta}$ est aussi solution.
En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet au moins une solution réelle sans chercher à résoudre l'équation.
2. Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine réelle de module 2. Résoudre l'équation pour la valeur de λ trouvée.
3. Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine complexe de module 2.
Résoudre l'équation pour les valeurs de λ trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans le plan, on donne deux points distincts A et B.

Soit (D) la perpendiculaire à (AB) en B. On considère tous les cercles (C) du plan caractérisés par la propriété suivante : T et T' étant deux points de contact des tangentes menées en A au cercle (C), le triangle ATT' est équilatéral.

1. En étudiant le rapport des distances du centre d'un cercle (C) aux points A et B, déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) qui passent par B.
2. Déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) tangents à la droite (D).

N.B.- Pour faire la figure on prendra $AB = 6$ cm.

PROBLÈME

10 POINTS

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$$(e) \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

1.
 - a. Quelles sont les solutions de (e).
 - b. Quelle est la solution de (e) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? On dit que (C) et (C') sont tangentes.
2. Représenter dans un même repère orthonormal les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives.
3. λ étant un réel strictement positif, soit h_λ les fonctions telles que

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}.$$

- a. Montrer que h_λ est une solution de (e).

- b. Soit (C_λ) la courbe représentative de ch_λ . Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C') montrer que les deux courbes sont tangentes en ce point.
- c. Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C') .

Partie B

Soit (e') l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2 \quad (e')$$

1. Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (e') .
2. On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.
Montrer que f est solution de (e') si, et seulement si, g est solution de l'équation (e) .
En déduire les fonctions g solutions de (e') .
3. Déterminer la solution de (e') dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0; 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.