Baccalauréat C groupe 1 [1] juin 1986

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan complexe, on considère les points : A d'affixe $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$, B d'affixe 2i.
M est le point d'affixe z, $z \neq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.

$$\text{Soit}\quad z' = \frac{z-2\text{i}}{2z-1-\text{i}}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que qu'un argument de z' soit égal à $\dfrac{3\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit un triangle isocèle (OAB) (OA = OB) et un point P variable du segment [AB], P $\neq$ A et P $\neq$ B.
La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A$'$ et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B$'$.

1. Démontrer que OA$'$ = BB$'$.
2. En déduire qu'il existe une rotation r telle que $r(\text{O}) = \text{B}$ et $r(\text{A}') = \text{B}'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

   Démontrer que $r(\text{A}) = \text{O}$. Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.
3. Démontrer que les quatre points O, A$'$, B$'$ et Ω sont cocycliques.

PROBLÈME **12 POINTS**

Le but du problème est :
- A. L'étude de la fonction g.
- B. La détermination d'un encadrement de g.
- C. L'évaluation d'une aire et de l'erreur commise.

On considère la fonction numérique g définie su [0 ; 1] par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(t) & = & \left(1-\text{e}^{-t}\right)\ln t \quad \text{pour } 0 < t \leqslant 1\\ g(0) & = & 0\end{array}\right.$$

(ln désigne le logarithme népérien.)

A.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\text{e}^{-t}}{t} = 1$.
2. Démontrer que g est continue sur [0 ; 1]. Étudier la dérivabilité de g sur [0 ; 1] et démontrer pour tout réel t de]0 ; 1] $g'(t) = \dfrac{\text{e}^{-t}}{t}\left(t\ln t+\text{e}^{t}-1\right)$.

1. Amiens - Rouen

3. Soit la fonction numérique f définie sur $]0\,;\,1]$ par

$$f(t) = t\ln t + \mathrm{e}^t - 1.$$

Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de f'. Montrer que f' s'annule une seule fois sur $]0\,;\,1]$ un un point t_0 (on ne calculera pas t_0).
En déduire le signe de f' et le sens de variation de f sur $]0\,;\,1]$.
En déduire que f ne s'annule qu'une seule fois sur $]0\,;\,1]$ pour une valeur t_1 (on ne calculera pas t_1).

4. Terminer l'étude de la fonction g. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité = 6 cm). On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On admettra que $t_1 \approx 0,3$.

B.
Soit n un entier naturel. On définit sur $[0\,;\,1]$ la fonction numérique φ_n par

$$\varphi_0(t) = 1 \quad ; \quad \varphi_1(t) = 1 - t \quad ; \quad \varphi_2(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!}.$$

et pour tout $n > 2$,

$$\varphi_n(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{t^n}{n!}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel t de $[0\,;\,1]$ $\varphi'_n(t) = -varphi_{n-1}(t)$.

2. On se propose de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t de $[0\,;\,1]$: $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$

a. Soit Φ et Ψ deux fonctions numériques définies sur $[0\,;\,1]$, dérivables sur $[0\,;\,1]$ telles que $\Phi(0) = \Psi(0)$.
Démontrer que si pour tout réel t de $[0\,;\,1]$: $\Phi'(t) \leqslant \Psi'(t)$ alors pour tout réel t de $[0\,;\,1]$, $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel t de $[0\,;\,1]$: $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$.

3. Pour tout entier naturel n, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0\,;\,1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1}.

C.
On considère l'ensemble Δ des points M du plan de coordonnées $(t\ ;\ y)$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $g(t) \leqslant y \leqslant 0$.
On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de Δ.

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et α un réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.
On pose

$$I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives.

2. En utilisant le B. 3., donner un encadrement de $\displaystyle\int_\alpha^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ au moyen des intégrales du type $I_n(\alpha)$.
En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Donner en cm^2 une valeur approchée par excès de l'aire Δ à 10^{-2} près.