Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles–Guyane septembre 1986

EXERCICE 1 **4 points**

Soit ABCD un tétraèdre régulier :

$$AB = BC = CD = DA = AC = BD.$$

1. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.
2. Soit I le milieu de [AB] et P le plan passant par I, parallèle à (AC) et (BD).
   a. Montrer que P coupe les autres arêtes du tétraèdre en J, K, L milieux respectifs de [BC], [CD], [DA].
   b. Montrer que IJKL est un carré.
3. Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D. Montrer que G est le centre du carré IJKL.
4. a. Soit Δ la droite orthogonale au plan P passant par G.
   Montrer que Δ passe par M et N, milieux respectifs des arêtes [AC] et [BD].
   b. Soit s la symétrie orthogonale d'axe Δ. Montrer que s laisse ABCD globalement invariant.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit F le point de coordonnées (6 ; 0).

1. Soit (E) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\mathrm{O}M + \mathrm{F}M = 10.$$

   Déterminer la nature de l'ensemble (E), son centre, ses sommets, son excentricité.
2. Soit (H) l'hyperbole d'excentricité $\sqrt{2}$, de foyer O, et de directrice associée la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ dans le repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Déterminer une équation cartésienne de (H) dans ce repère, ainsi que son sentre, ses sommets, ses foyers et ses asymptotes.
3. Tracer (E) et (H) dans le même repère. Montrer géométriquement que les tangentes aux points d'intersection de (E) et (H) sont orthogonales.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & \dfrac{\ln x}{\ln x + x - 1} & \text{si } x > 0\\ f(0) & = & 1 & \end{array}\right.$$

1. a. Montrer que f est continue en $x = 0$.

b. f est-elle dérivable en $x = 0$?

c. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. **a.** Soit d la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = \ln x + x - 1$$

Étudier les variations de d sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'équation $d(x) = 0$ possède une solution unique sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

b. Montrer que f peut-être prolongée par continuité en $x = 1$. on note g le prolongement obtenu.

3. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - \dfrac{1}{2}}{h}$. On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+h)$ au voisinage de $h = 0$:

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.

4. **a.** Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

b. Soit n la fonction numérique définie par :

$$n(x) = x - 1 - x\ln x.$$

Étudier les variations de n sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

5. Donner le tableau de variation de la fonction g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie B

Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$G(x) = \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que pour tout $t > 1$: $\quad 1 < \ln t + t < 2t$.

b. Montrer que pour tout $t \geqslant 1$: $\quad g(t) \geqslant \dfrac{\ln t}{2t}$.

c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$: $G(x) \geqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ puis que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout $t \geqslant \mathrm{e}$: $\quad \dfrac{\ln t}{\ln t + t - 1} \leqslant \dfrac{\ln t}{t}$.

b. En déduire que pour tout $x \geqslant \mathrm{e}$:

$$G(x) \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

puis que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0.$$

3. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Préciser $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Dresser le tableau de variations de G.

4. En faisant un partage de $[0\,;1]$ en deux intervalles de même amplitude, donner l'encadrement de $G(0)$ obtenu par la méthode des rectangles.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.