

∞ Baccalauréat C groupe 2¹ juin 1986 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
On désigne par F l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$F(z) = \frac{z^3}{2 + |z|^3}.$$

et par φ l'application de P dans P qui associe à tout point M d'affixe z , le point M' d'affixe $F(z)$.

1. Soit $z = re^{i\alpha}$ où le couple $(r; \alpha)$ appartient à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
Trouver un couple $(r'; \alpha')$ appartenant à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $F(z) = r'e^{i\alpha'}$.
2. On note f l'application de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{2 + x^3}.$$

Démontrer que f applique bijectivement $]0; +\infty[$ sur $]0; 1[$.

3. On considère la cercle Γ de centre O et de rayon 1 et T le point d'affixe $1 - i$.
Trouver l'image par φ du cercle Γ et de la demi-droite $[OT)$.
Quelle est l'image par φ de P?

EXERCICE 2

5 POINTS

On considère un carré (A, B, C, D) situé dans un plan P de l'espace. O désigne le centre de ce carré, H un point distinct de O de la droite Δ perpendiculaire en O au plan P, et H' son symétrique par rapport à O.

On note E l'ensemble {A, B, D} et F l'ensemble {B, C, D}.

L'objet de cet exercice est de décrire l'ensemble W des isométries qui appliquent E sur F.

1. Démontrer que l'ensemble W n'est pas vide.
2. Soit f un élément de W . Prouver les égalités :
 $f(A) = C$
 $f(\{B, D\}) = \{B, D\}$
 $f(O) = O$
 $f(H) = H$ ou $f(H) = H'$.
3. Déterminer et reconnaître tous les éléments de W .

PROBLÈME

10 POINTS

Les parties A et B sont indépendantes

Dans tout le problème $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x .

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 2 cm).

Partie A

On désigne par f l'application de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x.$$

1. Étudier la limite de f en 0 et $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f .
Dessiner la courbe F représentant f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n , on note A_i le point de F d'abscisse 10^i .
Soit G_n le barycentre des n points A_1, \dots, A_n .
Calculer en fonction de n les coordonnées x_n et y_n de G_n .
3.
 - a. Vérifier que l'application \ln admet pour primitive sur $]0; +\infty[$ l'application qui à x associe $x \ln x - x$.
 - b. Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les droites d'équations : $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ et la courbe F .

Partie B

On désigne par P^* l'ensemble des points de P d'abscisse non nulle et par θ l'application de P^* dans P^* qui associe à tout point M de coordonnées x et y le point M' de coordonnées x' et y' vérifiant

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{x} \\ y' &= -y. \end{cases}$$

1. Vérifier que θ est bijective et égale à sa bijection réciproque.
2. On désigne par E le sous-ensemble de P^* d'équation $xy = -9$.
Trouver l'ensemble $\theta(E)$.
Est-ce que θ conserve l'alignement?
3. Pour tout nombre réel a , on note g_a l'application de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par

$$g_a(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} + 4a \ln x$$

et G_a sa courbe représentative dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Montrer l'égalité $\theta(G_a) = G_a$.