

∞ Baccalauréat C Espagne juin 1986 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit α un nombre réel appartenant à $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) \quad (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha).$$

1. Soit z une solution de (E).
 - a. Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$.
 - b. En déduire que z est réel.
2.
 - a. Exprimer $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
 - b. Soit z un nombre réel; on pose $z = \tan \varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
Écrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.
 - c. Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit A et A' deux points distincts du plan, Δ et Δ' les droites perpendiculaires à la droite (AA'), respectivement en A et A', et O le milieu de [AA']. On pose $OA = r$.

Pour tout point F du segment [AA'], distinct de A et de A', on note P la parabole de foyer F et de sommet A, P' la parabole de foyer F et de sommet A', D la directrice de P et D' la directrice de P'.

1. Dans cette question F est fixé et on suppose donné un point commun à P et P'.
 - a. Placer les éléments géométriques précédents sur une figure.
 - b. Soit H et H' les projections orthogonales de M sur D et D'.
Prouver que le cercle C de centre M passant par F est tangent à D et D' aux points H et H' et que $MF = 2r$.
Prouver que droites (FH) et (FH') sont orthogonales; en déduire que les tangentes à P et P' au point M sont orthogonales.
 - c. Prouver que I milieu de [FM] appartient à la médiatrice de [AA'] et que $OF^2 + OI^2 = r^2$. (On pourra utiliser l'homothétie h de centre F et de rapport 1/2.)
2. On suppose maintenant que F parcourt le segment [AA'].
 - a. Prouver que P et P' se coupent en deux points M_1 et M_2 symétriques par rapport à la droite (AA') et indiquer comment on peut construire ces points.
 - b. À l'aide de 1. c. déterminer le lieu géométrique des milieux I_1 et I_2 de [FM₁] et [FM₂].
 - c. En employant un repère cartésien convenablement choisi, déterminer le lieu géométrique E des points M_1 et M_2 et placer E sur la figure.
N.B.- On admettra le théorème suivant : Théorème. (admis).
Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D); soit M un point de P et H sa projection orthogonale sur D; la tangente en M à P est la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{HMF} .

PROBLÈME

11 POINTS

Pour tout entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On appelle (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de f_n dans le plan P rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2 cm).

1. a. Calculer la dérivée de f_n et préciser la valeur de $f'_n(0)$ lorsque $n = 1$ puis lorsque $n > 2$. Dresser le tableau de variations de f_n pour $n = 1$, n pair, n impair supérieur à 1.
- b. Montrer que, pour tout n et pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$f_n(x) \leq f_n(n) = n^n e^{-n}.$$

- c. Représenter sur une même figure (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .

2. Pour tout réel $X \geq 0$, on pose

$$F_n(X) = \int_0^X f_n(x) dx.$$

- a. Déterminer des nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que la fonction :

$$G_n : x \mapsto e^{-x} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$$

soit une primitive de la fonction f_n sur $[0; +\infty[$.

- b. En déduire l'expression de $F_n(X)$ en fonction de X et de n .
 - c. L'entier n étant donné, montrer que $F_n(X)$ admet une limite I_n lorsque X tend vers $+\infty$ et que $I_n = n!$.
3. On se propose d'encadrer I_n par une méthode directe, indépendante des résultats du 2.

- a. À l'aide du 1. b., montrer que

$$\int_0^{2n} x^n e^{-x} dx \leq 2n n^n e^{-n}.$$

- b. Montrer que, si $x \geq 2n$,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} \leq n^n e^{-n}, \text{ et que } f_n(x) \leq (2n)^n e^{-n} e^{-\frac{x}{2}}$$

En déduire que, si $X \geq 2n$,

$$\int_{2n}^X x^n e^{-x} dx \leq 2(2n)^n e^{-2n}.$$

- c. À l'aide de 3. a. et 3. b., majorer $F_n(X)$ lorsque $X \geq 2n$.

En déduire que $I_n \leq 2n^n e^{-n} \left[n + \left(\frac{2}{e}\right)^n \right]$.

- d. Montrer, d'autre part, que

$$(n+1)^n e^{-n-1} \leq \int_n^{n+1} x^n e^{-x} dx \leq I_n.$$

4. Déduire de 3. c. et 3. d. un encadrement de

$$u_n = \frac{\ln I_n - n \ln n}{n}$$

et déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.