Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger groupe Ibis juin 1986

EXERCICE 1 **5 points**

Soit dans un plan, un triangle $A_1A_2A_3$. Á tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A3, du triangle, on associe :
a. les points M_1, M_2, M_3, symétriques de M dans les symétries orthogonales $s_{(A_2A_3)}$, $s_{(A_3A_1)}$, $s_{(A_1A_2)}$ d'axes respectifs (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2).
b. Les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites (M_2M_3), (M_3M_1), (M_1M_2).
Les symétries orthogonales d'axes Δ_i, $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, sont notées s_{Δ_i}.
On désigne par $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ_1, Δ_2, Δ_3.

1. Démontrer que Δ_1 est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.

2. Soit $s = s_{(A_1A_3)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_2)}$.

  a. Quelle est la nature de s ?

  b. Déterminer $s(A_1)$ et $s(M)$. Caractériser s.

  c. Démontrer que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3}\ ,\ \overrightarrow{A_1M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_1}\ ,\ \overrightarrow{A_1A_2}}\right) \quad (\pi) \qquad (1)$$

3. Établir d'une manière analogue

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}\ ,\ \overrightarrow{A_2M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_2}\ ,\ \overrightarrow{A_2A_3}}\right) \quad (\pi) \qquad (2)$$

$$\text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{A_3A_2}\ ,\ \overrightarrow{A_3M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_3}\ ,\ \overrightarrow{A_3A_1}}\right) \quad (\pi) \qquad (3)$$

4. Montrer que l'ensemble (C) des points M du plan, distincts des sommets A_1, A_2, A_3, tels que les points M_1, M_2, M_3 soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1\,A_2A_3$.

5. On suppose, dans cette question, que le point M n'appartient pas à (C).

  a. Démontrer que les droites $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.
  Dans la suite du problème ce point P appelé l'associé du point M.

  b. Quel est l'associé d'un point M appartenant aux côtés du triangle $A_1\,A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle ?

  c. On suppose que le point M n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1\,A_2A_3$.
  Démontrer, en utilisant les relations (1), (2) et (3) que si M a pour associé P alors le point P a pour associé le point M.