Durée : 4 heures

Baccalauréat C La Réunion septembre 1986

EXERCICE 1 **4 points**

L'éclat d'un astre caractérise l'impression plus ou moins intense que produit sa lumière sur l'œil ou sur une plaque photographique. L'éclat est mesuré par la magnitude m, quantité qui augmente quand l'éclat diminue.
La magnitude de la comète de Halley à une date donnée dépend à la fois de sa distance Δ à la Terre (lieu de l'observation) et de sa distance Γ au Soleil (astre qui l'éclaire). Des mesures sur plaques photographiques ont donné les résultats suivants, où Δ et Γ sont exprimées en unités astronomiques (1 unité astronomique $= 1,5 \cdot 10^8$ km) :

Date	m	Δ	Γ
15/02/86	4,1	1,500	0,600
17/03/86	4,5	0,887	0,947
11/04/86	4,0	0,417	1,332
11/05/86	7,1	1,114	1,779
10 ;06/86	9,2	2,093	2,198
15/07/86	10,7	3,138	2,653

Des considérations théoriques permettent de penser que $m = -5\log\Delta$, où log désigne la fonction logarithme décimal, ne dépend que de Γ.

1. On pose $x = \log\Gamma$ et $y = m - 5\log\Delta$. Représenter le nuage de points $(x~;~y)$ correspondant aux données ci-dessus.
2. Ajuster par la méthode des moindres carrés une fonction affine à ces points. Apprécier la qualité de cet ajustement.
3. En déduire l'expression de m en fonction de Δ et de Γ.
   Application : le 04/08/86, on a $\Delta = 3,636$ et $\Gamma = 2,900$; quelle est la magnitude de la comète de Halley à cette date ?

N.B. : cet exercice est hors programme.

EXERCICE 2 **5 points**

L'objet de l'exercice est d'étudier des relations entre d'une part des propriétés de configurations planes et d'autre part des égalités dans le groupe des isométries du plan.
Dans tout l'exercice, s_{A}, s_{B}, $s_{\text{C}}, \cdots$, désignent des symétries centrales de centres A, B, C, ... et S_D, $S_\Delta, \ldots$ des symétries orthogonales par rapport à des droites D, Δ, ...

1. Interpréter géométriquement l'égalité $s_{\text{A}} \circ s_{\text{B}} \circ s_{\text{C}} \circ s_{\text{D}} = \text{Id}$.
2. Traduire par une égalité entre isométries la propriété :
   D est une bissectrice de Δ_1 et de Δ_2.
3. Montrer que $S_d \circ s_{\text{A}} = s_{\text{A}} \circ S_d$ si et seulement si $\text{A} \in D$.
4. Montrer que D_1, D_2, D_3 sont concourantes, si et seulement si

$$\left(S_{D_1} \circ S_{D_2} \circ S_{D_3}\right)^2 = \text{Id}.$$

PROBLÈME **11 points**

L'objet du problème est de construire une bijection continue et positive sur R_+ à partir d'une fonction continue et positive quelconque sur R_+.
On considère une fonction f définie et continue sur $[0~;~+\infty[$ et telle que, pour tout $t \geqslant 0$, on ait $f(t) > 0$.
On définit à partir de f une nouvelle fonction F en posant :

$$\left\{\begin{array}{l c l}F(0) &=& 0\\ F(x) &=& \dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} \quad \text{pour tout } x > 0.\end{array}\right.$$

On admet que, pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t > 0$, de sorte que F est effectivement définie sur $[0~;~+\infty[$.

A. - Étude de F dans un cas particulier

Dans cette partie on pose, pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, $f(t) = \mathrm{e}^t$.

1. Montrer que F est définie par : $F(0) = 0$

$$\left\{\begin{array}{l c l}F(0) &=& 0\\ F(x) &=& x - 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \quad \text{pour tout } x > 0.\end{array}\right.$$

2. **a.** Montrer que F est continue et dérivable sur $]0~;~+\infty[$; calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Montrer que F est continue et dérivable en 0. (Indication : utiliser le développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle au voisinage de 0).

3. Étudier les variations de F. (Indication : étudier d'abord le signe de la fonction auxiliaire $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x - 1$).

4. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de F dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a. Montrer que $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation y = x - 1 sont asymptotes au voisinage de + 00.

b. Tracer $(\mathscr{C})$ avec soin.

B. - Quelques propriétés de F dans le cas général.

1. Montrer que, pour tout $xE[0, +00[, ona ř\ F(x)\ x$.
En déduire que F est continue en 0. 1

2. Soit G la primitive de f sur $[0~;~+\infty[$ qui s'annule en 0 et soit H la primitive de G sur $[0~;~+\infty[$ qui s'annule en 0.

a. Montrer que, pour tout $x > 0$. $H(x)F(x) = x - H'(x)$.

b. En déduire que F est continue et dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, F/( ) = f(x) H (x) X [H/(xW

3. Montrer que F est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$. (Indication : étudier d'abord les variations et le signe de H' puis de H).

4. **a.** Montrer que F est une bijection de $[0~;~+\infty[$ sur un intervalle I et que l'on a ou bien I = $[0~;~+\infty[$, ou bien I = $[0~;~a[$ avec $a > 0$.

b. Donner un exemple de fonction f de telle façon que 1 = $[0~;~+\infty[$ et, pour chaque a > 0, un exemple de fonction f telle que I = $[0~;~a[$. (Indication : chercher f sous la forme $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{bt}$).

N.B. : La question A. 2. b) est hors-programme, on pourra la remplacer par « Étudier la limite de F en 0 et admettre que F est dérivable en 0 ».
La question B. 1. est hors programme, on pourra la remplacer par « Montrer que, pour tout x de $[0~;~+\infty[$ on a $0 \leqslant F(x) \leqslant x$. En déduire que F admet une limite en 0. »