

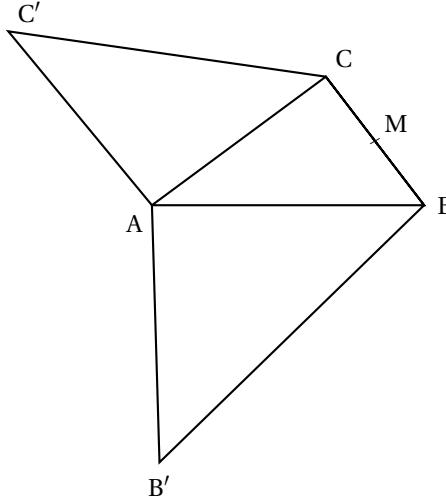
Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier¹ juin 1986 ∞

EXERCICE 1

6 points

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment [BC].
Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles et isocèles de sommet A.



Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et (B'C) sont perpendiculaires et que

$$B'C' = 2AM.$$

1. Méthode géométrique

- a. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
Déterminer les images des points A et M par h .
Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C.
- b. En déduire que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

2. Utilisation des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c .
Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B', C' ?
Retrouver alors les résultats du 1. b.

EXERCICE 2

4 points

On donne dans le plan deux points fixes distincts F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1.
 - a. Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E ?
 - b. Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse E appartenant à D.
2.
 - a. Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E ; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont on déterminera la directrice Δ .

1. Aix-Marseille, Corse, Nice, Toulouse

- b. Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B.

EXERCICE 3**10 points****Partie A**

1. Étudier la fonction

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{cases}$$

- a. Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'x, y'y$.
- b. Pour tout x réel on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

- i. Justifier que F est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} .
Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F .
- ii. Montrer que F est impaire.
- iii. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Déduire de cette inégalité que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- c. x étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

- i. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} . Étudier le sens de variation de G sur \mathbb{R} .
- ii. Justifier l'affirmation suivante : pour tout x de \mathbb{R}_+^*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}.$$

- iii. Déduire de a. et b. que l'on peut affirmer : pour tout x de \mathbb{R}

$$G(x) \leq \ln 2.$$

[On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale].

- iv. Déduire de a. et c. que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L , limite quand x tend vers $+\infty$ de $G(x)$.
- v. Montrer que G est une fonction impaire.
- vi. Déduire de d. et e. que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers $-\infty$. Exprimer cette limite en fonction de L .

Partie B

On considère la fonction φ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \end{cases}$$

- a. i. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ .
 ii. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.
 iii. Dédire de b. une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au 3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question A. 3. d.
- b. On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 i. Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2} \right).$$

[On rappelle que, par 1. b. ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.

- ii. Étudier les branches infinies de Γ . Reconnaître d'éventuelles courbes asymptotes à Γ .
 iii. Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine. (On pourra étudier la variation de $h : x \mapsto F(x) - x$). t) Tracer Γ .
 c. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ , l'axe x , les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F(u_n).$$

- a. Montrer par récurrence que les termes de (u_n) sont strictement positifs.
 b. Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.
 c. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?