

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier¹ septembre 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}] \\ f(x) = \frac{4}{e^2} & \text{pour } x \in]-\frac{1}{2} ; 1] \\ f(x) = \frac{4}{e^2} + \ln x & \text{pour } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
2. Tracer la courbe représentative (\mathcal{C}) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (\mathcal{C}), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

EXERCICE 2

4 points

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z - i$.

1. Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques. On notera A le point invariant de T .
Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$, en supposant $M \neq A$.
2.
 - a. Construire M' pour un point M donné.
 - b. Déterminer l'image D' par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D' .
3.
 - a. Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de $B' = T(B)$ soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$. Mettre en place B et B' .
 - b. Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques.

PROBLÈME ÉTUDE DE LA CISOÏDE DE DIOCLÈS :

12 points

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$$

1. Dresser le tableau des variations de f

1. Aix-Marseille, Corse, Nice, Toulouse

2. Soit Γ_1 la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe Γ_1 au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. Tracer la courbe Γ_1 et la droite T .
3. Sur le même graphique, tracer Γ_2 courbe symétrique de Γ_1 dans la symétrie orthogonale d'axe Ox .
4. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Montrer que Γ a pour équation cartésienne :

$$(E) \quad x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$

Γ est appelée cissoïde de Dioclès.

Partie B Interprétation géométrique de (E) :

I est le point de coordonnées $(1; 0)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 C est le cercle de diamètre $[OI]$ et Δ est la tangente à C au point I .
 Soit D la droite passant par O de coefficient directeur t , $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées de M tel que $C \cap D = \{O, M\}$.
 Déterminer les coordonnées de M' tel que $\Gamma \cap D = \{O, M'\}$.
 Déterminer les coordonnées de N tel que $\Delta \cap D = \{N\}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.
3. Déterminer l'intersection de Γ et C .

Partie C Propriétés géométriques

Soit M un point de C , N le point d'intersection de (OM) et Δ et M' le point d'intersection de (OM) et Γ .

On considère le point P tel que $OINP$ soit un rectangle.

1. Montrer que les triangles IMN et $OM'P$ se transforment par une symétrie centrale à déterminer.
2. En déduire que le triangle $PM'N$ est rectangle.
3. Soit F le symétrique de I par rapport à O . On considère la parabole \mathcal{P} de foyer F et de directrice Δ . La droite (FP) coupe Δ en R . Construire géométriquement le point K de \mathcal{P} qui se projette orthogonalement en R sur Δ .
4. Démontrer que la droite (PM') est tangente en K à \mathcal{P} .
5. Démontrer réciproquement que si K est un point de \mathcal{P} , la projection orthogonale de O sur la tangente en K à \mathcal{P} est un point M' de Γ .

Remarque : Γ apparaît comme ensemble des projections orthogonales du sommet d'une parabole sur les tangentes à cette parabole. On dit pour cela que la cissoïde de Dioclès est la podaire d'une parabole par rapport à son sommet.