Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1986

EXERCICE 1 **4 points**

Dans un plan orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, A et B sont les points d'affixes respectives 1 et 2i.
Pour tout nombre complexe $z \neq 2\text{i}$, on pose :

$$f(z) = \frac{z-1}{z-2\text{i}}.$$

1. Lorsque M est un point d'affixe z, autre que A et B, exprimer l'argument de $f(z)$ à l'aide de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}\right)$.

   Déterminer et tracer l'ensemble C_1 des points différents de A et B, et d'affixe z telle que $\dfrac{\pi}{2}$ soit une mesure en radians de l'argument de $f(z)$.
2. Soit C_2 l'ensemble des points différents de B et d'affixe z telle que $f(z)$ ait pour module 2.

   Montrer que C_2 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer C_2.
3. Soit M_0 un point différent de B et d'affixe z_0. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f(z_0)$ pour que M_0 soit commun à C_1 et C_2. En déduire que C_1 et C_2 ont un unique point commun dont on précisera les coordonnées cartésiennes.

EXERCICE 2 **5 points**

f est l'application de $[0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b et une fonction $\mathcal{E}$ de $[0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, tels que :

$$\sqrt{x^2+4} = ax+b+\mathcal{E}(x) \quad \text{pour } x \text{ positif ou nul.}$$

2. On note Γ la courbe représentative de f dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que Γ dmet une droite asymptote d dont on précisera une équation.

   Préciser la position de Γ par rapport à d.
3. Étudier les variations de f et racer Γ en prenant l'unité de longueur égale à 2 cm.

PROBLÈME **11 points**

Pour tout entier n, on note f_n l'application de $\left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_n(x) & = & \dfrac{\sin[2(n+1)x]}{\sin x} \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } \left]0~;~\dfrac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) & = & 2n+2. \end{array}\right.$$

Le but du problème est d'établir la convergence de la suite u de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

et de calculer sa limite.

Partie A

Préliminaires

1. Montrer que f_n est continue dans $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; en déduire que la suite u est bien définie dans $\mathbb{N}$.
2. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.
   (On rappelle que $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$).
3. Calculer $u_{0,\,u_1}$ et u_2.

Partie B

Le but de cette partie est d'établir la convergence de u.

1. Montrer que :

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{dx}$, et $\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x$, k étant un entier naturel non nul.
   En déduire que : $u_n = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Etablir $\left|u_n - 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{2}{2n+3}$.
4. En déduire la convergence de la suite u.

Partie C

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit F la primitive nulle en zéro de φ ; soit G l'application de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G(v) = F(\tan v)$.

1. Montrer que G est dérivable et admet une fonction dérivée G' très simple que l'on précisera.
2. En déduire G.
3. En déduire la valeur de J. Quelle est la limite de la suite u ?