Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris juin 1986

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; on prend comme unité graphique 1 cm.
On considère l'équation

$$z^3 - (6+3\text{i})z^2 + (9+12\text{i})z - 9(2+3\text{i}) = 0. \quad (E)$$

1. **a.** Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique z_1 que l'on calculera.
   b. Déterminer les autres solutions de (E), notées z_2 et z_3.
2. Soit M1, M2, M3 les points ayant respectivement pour affixes z_1, z_2, z_3.
   a. Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.
   b. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[M_2M_3]$ et de l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3.
   c. Placer les points M_1, I et G sur cette figure et indiquer une construction géométrique de M_2 et M_3.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan orienté P, on considère un triangle ABC équilatéral direct, c'est à dire que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.
Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

1. **a.** Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer $r(\text{D})$ et $r(\text{B})$.
   b. Montrer que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de [BD].
2. tr
   a. Montrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω. (on pourra considérer l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega},\ \overrightarrow{M\text{A}}\right)$.)
   b. Prouver que Γ admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à Γ. Construire le cercle Γ.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\text{e}^x - \text{e}^{-x}\right).$$

et d'expliciter sa fonction réciproque g.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
   b. Déterminer la solution φ de cette équation telle que :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

   Comparer φ et f.

2. **a.** Étudier les variations de f, donner son tableau de variations et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en prenant 1 cm pour unité.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3. **a.** Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque g de f sur la même figure que $\mathscr{C}$.
   b. Expliciter g en résolvant l'équation $f(x) = y$ où y est un nombre réel.

B. L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\,\text{d}t.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$.)

1. **a.** Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   b. Déterminer le sens de variation de G.
   c. Montrer que G est impaire.

2. **a.** Prouver que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{1+2t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

   b. En déduire par un minoration de G sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ que :

$$\lim_{y \to +\infty} G(y) = +\infty.$$

3. **a.** Montrer que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Soit F la fonction réciproque de G. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre réel x :

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4[F(x)]^2}.$$

   c. En déduire que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'' - F = 0$.
   Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
   d. Prouver que $F = f$ et que $G = g$.
   e. Contrôler ce dernier résultat grâce à un calcul direct de la dérivée de g.

4. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de G au voisinage de $+\infty$, en comparant $\dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ à $\dfrac{1}{t}$.
   Plus précisément, pour tout nombre réel $t > 1$, on pose :

$$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

et pour tout nombre réel $y \geqslant 1$, on pose :

$$H(y) = \int_1^y h(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que, pour tout $t \geqslant 1,\ 0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{8t^3}$.

b. En déduire que $H(y)$ admet une limite finie (qu'on ne demande pas d'expliciter) lorsque y tend vers $+\infty$.

c. Prouver que $G(y) - \ln y$ admet un limite finie ℓ lorsque y tend vers $+\infty$.

d. Calculer ℓ grâce à la relation $G = g$.