

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1985 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = -x \ln x & \text{si } 0 < x \leq e \\ f(x) = e - 2x & \text{si } x > e. \end{cases}$$

1.
 - a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
 - b. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
2. Soit α un nombre réel de l'intervalle $]0; 1]$.
 - a. Calculer $\int_{\alpha}^1 f(x) dx$. (On pourra faire une intégration par parties.)
 - b. En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

(On donnera le résultat en cm^2 .)

- c. Cette aire admet-elle une limite lorsque α tend vers 0? \ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2

4 points

Étant donnés deux points distincts F et F' du plan P , dans tout cet exercice, on appelle ellipse de foyers F et F' l'ensemble des points N de P tels que : $NF + NF' = 2a$ où a est un réel strictement positif vérifiant $2a > FF'$.
Soit B et F deux points donnés distincts du plan.

1. Quel est l'ensemble C des points O tels qu'il existe une ellipse de centre O , vérifiant les deux conditions suivantes :
 - (i) ses deux foyers sont distincts et l'un d'eux est F .
 - (ii) B est l'un des sommets du petit axe.
2. Quel est, pour ces ellipses, l'ensemble des foyers distincts de F .
3. Pour une ellipse E vérifiant les conditions (i) et (ii) la droite BF' recoupe E en un point M distinct de B . Montrer que les demi-droites $F'B$ et $F'M$ sont opposées. Montrer que M reste situé sur une ellipse fixe quand E varie.

PROBLÈME

12 points

On se propose d'étudier l'effet d'une similitude sur une configuration géométrique plane

Partie A

1. a. Résoudre dans C l'équation :

$$8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + (1-i) = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

- b. Représenter les images A, B, C des solutions dans le plan complexe de façon que le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ soit de sens direct.

Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ (unité : le radian).

- a. Faire une figure représentant les images du carré OABC par :

$$s, \quad s^2 = s \circ s, \quad s^3 = s \circ s^2, \quad s^4 = s \circ s^3.$$

(Aucune justification n'est demandée.)

- b. Soit M le point de coordonnées $(x; y)$ et M' celui de coordonnées $(x'; y')$; exprimer x' et y' en fonction de x et de y lorsque : $M' = s(M)$.

- c. Déterminer l'image D_1 de la droite (BC) par s et en donner une équation cartésienne.

- d. Même question pour D'_1 image de la droite (BC) par s^2 .

3. Soit E l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

On note u_0 l'aire de E, u_1 l'aire de $s(E)$. Plus généralement on note u_n l'aire de $s^n(E)$ pour n entier naturel.

Quelle est l'expression de u_n en fonction de n et quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Cette suite converge-t-elle ?

Partie B

On étudiera ici une courbe et des problèmes associés.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = x + \sin \pi x.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans P.

1. a. Démontrer qu'il existe au moins une translation t dont on précisera le vecteur et telle que $t(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

- b. Démontrer que \mathcal{C} admet au moins un centre de symétrie.

2. Soit f_1 la restriction de f à $[0; 1]$. Soit Γ_1 la courbe représentative de f_1 dans P. Étudier le sens de variation de f_1 et tracer la courbe Γ_1 . Préciser les tangentes à la courbe Γ_1 aux points d'abscisses $0, \frac{1}{2}$ et 1.

3. a. Montrer que pour tout x réel on a la double inégalité

$$(1) \quad x - 1 \leq f(x) \leq x + 1.$$

- b. Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

4. a. Interpréter géométriquement la double inégalité (1).

- b.** Tracer la courbe \mathcal{C} ; préciser en particulier les tangentes aux points d'intersections de \mathcal{C} avec D_1 (D_1 a été définie au A, 2., c.)
- 5. a.** Calculer l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

b. Soit $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \left[\frac{p}{n} + \sin \frac{p}{n} \pi \right]$.

Déduire du a. la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.