Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1987

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère l'application de $\mathbb{C} - \{-\text{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$Z = f(z) = \frac{z - \text{i}}{\text{i}z - 1}.$$

On note m l'image de z, A celle de i, et B celle de $-$i.

1. Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\dfrac{z-\text{i}}{\text{i}z-1}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E}_1)$ des points m tel que Z soit réel.
3. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E}_2)$ des points m tel que $|Z| = 1$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Calculer une primitive de chacune des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin^4 x \quad \text{et par :} \quad g(x) = \cos^3 x.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (0, i, j), (unité 5 cm).

A. - Soit g l'application de $]0\ ;\ +\infty]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x \ln x.$$

1. Étudier les variations de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   On précisera l'allure de $\mathscr{C}_g$ au voisinage de l'origine.

B. - On considère maintenant l'application f de $[0\ ;\ +\infty]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0, \\ f(x) & = & |x \ln(x)| \quad \text{si } x \neq 0. \end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le même repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, la première bissectrice et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $x = \text{e}$.
3. Démontrer qu'il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ \text{e}[$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\text{e}}$.
   Placer le point correspondant sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.

C. - On définit la suite numérique (u_n) par son premier terme u_0, (u_0 étant réel strictement positif et différent de 1), et pour tout n, par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f désigne l'application définie au B.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle stationnaire ?

2. On choisit $u_0 \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$. Démontrer que

   a. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   b. La suite (u_n) est strictement croissante.

   c. La suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. On choisit maintenant $u_0 \in \left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,1\right[$. Montrer que $u_1 \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

4. **a.** Pour $u_0 > \mathrm{e}$ montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

   b. Montrer que, pour tout x supérieur à e, on a $f'(x) \geqslant 2$.

   c. En déduire que $u_{n+1} - u_n \geqslant 2\,(u_n - u_{n-1})$.

   d. Montrer que $u_{n+1} - u_n \geqslant 2^n\,(u_1 - u_0)$.

   e. Montrer que $u_{n+1} \geqslant u_0 + (u_1 - u_0)\left(2^{n+1} - 1\right)$. En déduire la nature de la suite (u_n).

5. Que dire de la suite (u_n) si on choisit $u_0 = \alpha$, α étant la valeur introduite au B. 3 ?