Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1987

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour tout réels x et y, $z = x + \text{i}y$ est l'affixe du point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, c'est aussi celle du vecteur $\overrightarrow{\text{OM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
A est le point d'affixe 2i, D la droite d'équation $y = 0$.
f est la fonction complexe de la variable complexe z qui à z non réel associe :

$$z' = \frac{z - 2\text{i}}{z - \overline{z}}.$$

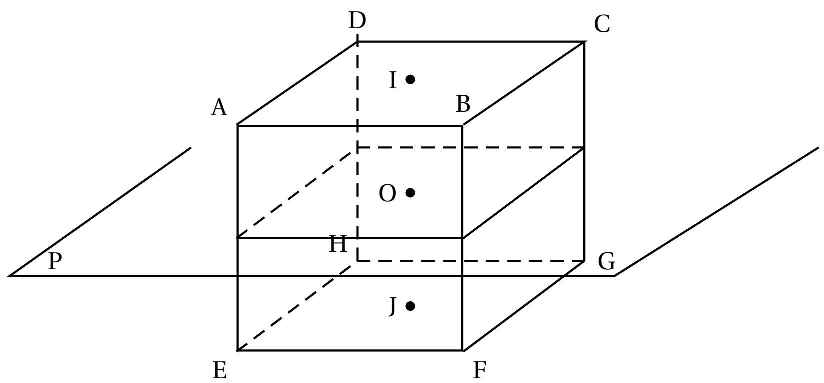
F associe à tout point M de P $-\{\text{D}\}$ d'affixe z, le point M$'$ d'affixe z'.

1. Exprimer les parties réelle et imaginaire de z' en fonction de celles de z et déduire que f définit une bijection de $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ à déterminer.
2. B est le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives par F des demi-droites ouvertes d'origine O portées par l'axe imaginaire, l'axe imaginaire étant l'ensemble des points d'abscisse nulle.
3. Quelle est l'affixe du projeté orthogonal H sur D du point M d'affixe z ?

   Quelle est celle de $\overrightarrow{\text{HM}}$?

   Montrer que l'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|f(z)\right| = \frac{1}{2}$ est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

EXERCICE 2 **6 points**



A, B, C, D, E, F, G, H sont les sommets d'un cube tel que ABCD soit une face horizontale, EFGH l'autre, et que la translation de vecteur vertical $\overrightarrow{\text{AE}}$ transforme B en F, C en G et D en H.
P désigne la plan horizontal passant par le centre O du cube, (ABC) celui passant par A, B et C, s_P la réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport à P.
I et J sont les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH.
Il s'agit de déterminer les rotations de l'espace qui transforment tout sommet de l'une des faces horizontales en un sommet de l'autre.

1. **a.** On suppose que s est une réflexion transformant {A, B, C, D} en {E, F, G, H}. Déterminer $s(\text{I})$ et $s(\text{J})$.

   b. Déduire qu'il existe une seule réflexion transformant {A, B, C, D} en {E, F, G, H}.
2. Pour toute rotation r échangeant {A, B, C, D} en {E, F, G, H}, déterminer $r(\text{I})$, $r(\text{J})$ et $r(\text{O})$.

   Déduire que l'axe de r passe par O, qu'il est horizontal et que r est un demi-tour.
3. Soit r un demi-tour d'axe horizontal L passant par O.

   a. Déterminer $r \circ s_P(\text{I})$ et $r \circ s_P(\text{M})$ pour tout point M de L.

   Déduire que $r \circ s_P$ est la réflexion s_{Q} par rapport au plan vertical contenant L.

   b. On note Δ la droite intersection des plans Q et (ABC).

   Montrer que (ABC) est stable par s_{Q}. Quelle est la restriction de s_{Q} à ce plan (ABC) ?

   c. Montrer que r est solution si et seulement si la symétrie orthogonale s_Δ par rapport à Δ, isométrie du plan (ABC), laisse invariant l'ensemble {A, B, C, D}.
4. Déduire les quatre demi-tours solutions.

PROBLÈME **10 points**

I. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{llcl} \text{si } n = 0 & f_0(x) & = & \text{e}^{1-x}, \\ \text{si } n \in \mathbb{N}^* & f_n(x) & = & \dfrac{x^n}{n!}\text{e}^{1-x}. \end{array}\right.$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

1. Étudier f0. Tracer $(\mathscr{C}_0)$ en précisant la droite asymptote quand x tend vers $+\infty$ et les tangentes à $(\mathscr{C}_0)$ aux points d'abscisses 0 et 1.
2. On se propose d'étudier f_n pour tout entier naturel n non nul.

   a. Étudier les variations de f_n (on distinguera plusieurs cas).

   b. Montrer que $(\mathscr{C}_n)$ admet une droite asymptote quand x tend vers $+\infty$.
3. **a.** Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ dans un même repère. L'étude des branches infinies en $-\infty$ n'est pas demandée.

   b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

   (On pourra remarquer une relation simple entre f_1, f_2 et f_2'.)

II. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$ et α un réel strictement positif fixé.
On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^{\alpha} f_n(t)\,\text{d}t.$$

1. **a.** Calculer I_0.

   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\alpha^n}{n!} I_0$.

   c. On admettra que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$.

   En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = I_n - \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{1-\alpha}$.

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \mathrm{e} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{1-\alpha}.$$

et que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = \mathrm{e}^{\alpha}.$$

c. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.