

∞ Baccalauréat C groupe 1<sup>1</sup> juin 1987 ∞

**EXERCICE 1**

**4 POINTS**

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$u = \frac{\sqrt{3} + i}{4}.$$

2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans lui-même qui à tout nombre complexe  $z$  associe :

$$f(z) = uz + (1 + i)(1 - u).$$

Montrer que  $f$  est bijective, et déterminer le complexe  $w$  tel que  $f(w) = w$ .

3. Soit  $I, M$  et  $M'$  les points du plan complexe ayant pour affixe  $w, z$  et  $f(z)$  respectivement. On suppose  $M$  différent de  $I$ .

Donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$ , et calculer la distance  $IM'$  en fonction de la distance  $IM$ .

On note  $F$  l'application qui à  $M$  associe  $M'$ .

Préciser la nature de  $F$  et ses éléments caractéristiques.

4. Soit  $A_0$  le point d'affixe  $z_0 = -1 + 2i$ .

On définit, pour tout entier naturel  $n, z_{n+1} = f(z_n)$ .

On note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  dans le plan complexe.

Calculer, en fonction de  $n$ , la distance  $IA_n$ .

Quelle est la limite de cette distance quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

**EXERCICE 2**

**4 POINTS**

Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan,  $F$  un point dont la distance à  $\mathcal{D}$  est égale à 2,25 (unité : 1 cm) et  $\Delta$  la droite passant par  $F$  et perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .

1. Déterminer l'ensemble (E) des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MF}{MH} = 0,8$ ,  $H$  étant la projection orthogonale de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

Donner la nature de (E). Préciser les directrices, les foyers et les sommets  $A$  et  $A'$  situés sur  $\mathcal{D}$ . Représenter (E) sur un dessin.

2. Déterminer l'équation cartésienne de (E) dans un repère orthonormal formé par  $\Delta$  et la médiatrice de  $[AA']$ .

**PROBLÈME**

**12 POINTS**

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines fonctions du type  $x \mapsto x^\alpha e^{-x}$ ,  $\alpha$  étant un réel strictement positif.

**A)**

On désigne par  $g_1$  et  $g_2$  les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$g_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad g_2(x) = x^2e^{-x}.$$

1. Étudier les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  : on donnera le sens de variation et les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Dessiner leurs courbes représentatives  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dans le même repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm) ; on prendra soin de préciser leur position.

2. Déterminer une équation de la tangente à  $(C_1)$  au point  $M$  d'abscisse  $x$ ; cette tangente coupe l'axe des ordonnées  $y'y$  en un point  $T$ .

Déterminer, en fonction de  $x$ , l'ordonnée de  $T$ .

3. Soit  $t$  un réel donné, et  $T$  le point de  $y'y$  tel que  $OT = t$ . Utiliser la courbe  $(C_2)$  pour étudier, suivant la valeur de  $t$ , le nombre de tangentes à  $(C_1)$  passant par  $T$ .

En déduire une construction géométrique de la tangente en  $M$  à  $(C_1)$ .

**B)**  $n$  étant un entier naturel non nul,  $f_n$  est la fonction de  $[0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ , définie par

$$f_n(x) = x^n e^{-x},$$

de courbe représentative  $(\mathcal{C}_n)$  dans un repère orthogonal.

On désigne par  $S_n$  l'aire de la portion de plan délimitée par  $(\mathcal{C}_n)$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation :  $x = 1$ .

1. En remarquant que, pour  $x$  positif, on a  $e^{-x} \leq 1$ , montrer que  $S_n < \frac{1}{n}$ .

En déduire la limite de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Établir une relation entre  $S_{n+1}$  et  $S_n$ .

En déduire que  $\frac{e^{-1}}{n+1}$  est une valeur approchée de  $S_n$  à  $\frac{1}{(n+1)^2}$  près.

**C)** On note  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) &= x^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-x}, \text{ si } x > 0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On appelle  $u$  la suite définie par  $u_0 = \frac{1}{3}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

On admet qu'il existe  $m$  strictement positif tel que

$$|f'(x)| < m < 1 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \left] \frac{1}{3}; 1 \right].$$

1. a. Montrer que l'image par  $f$  de tout élément  $x$  de  $\left] \frac{1}{3}; 1 \right]$  est aussi dans

$$\left] \frac{1}{3}; 1 \right].$$

- b. On pose  $h(x) = f(x) - x$ . Montrer que  $h$  s'annule en un point  $\lambda$  unique de  $\left] \frac{1}{3}; 1 \right]$ .

- c. Rappeler l'inégalité des accroissements finis, et montrer qu'on peut l'appliquer à deux points  $a$  et  $b$  quelconques de  $\left] \frac{1}{3}; 1 \right]$ .

2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $\left] \frac{1}{3}; 1 \right]$ .

- b. Montrer que, si  $u$  converge, sa limite est  $\lambda$ .

- c. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leq m |u_n - \lambda|;$$

en déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$ .