Baccalauréat C groupe 2 [1] juin 1987

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A un point de $\mathscr{P}$ d'affixe a non nulle et soit ABC le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O, de rayon OA et tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Déterminer, en fonction de a, les affixes b et c des points B et C respectivement.
2. On désigne par M le point d'affixe $z = a^3$.
   Déterminer A pour que M soit le milieu de [BC].
3. Dans cette question, le point A décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
   Déterminer l'ensemble des points N tels que le quadrilatère ABNC soit un losange.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit n un nombre entier supérieur à 1.
On considère une urne dans laquelle se trouvent :

- une boule portant le numéro 1,
- deux boules portant le numéro 2,
- trois boules portant le numéro 3,
- etc.
- n boules portant le numéro n

A. Combien l'urne contient-elle de boules ?

B On tire au hasard une boule dans l'urne, tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. On suppose dans cette question que n est pair.
   Exprimer en fonction de n la probabilitéé pour que la boule tirée porte :
   a. un numéro pair ;
   b. un numéro impair.
2. Dans cette question, on suppose seulement que le nombre total de boules dans l'urne est 21.
   Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4.

PROBLÈME **10 POINTS**

A Dans cette partie, on étudie la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \frac{\text{e}^x - 1}{x\text{e}^{2x}}.$$

1. **a.** Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de la fonction h telle que :

$$h(x) = \text{e}^x - x - 1.$$

   b. En déduire que, pour tout réel α, $\text{e}^{x\alpha} \geqslant \alpha + 1 \qquad (1).$

1. Bordeaux Caen Clermont Ferrand Limoges - Nantes - Orléans - Tours - Poitiers - Rennes

2. **a.** En utilisant l'inégalité (1), démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$e^{2x} \leqslant g(x).$$

b. Justifier l'écriture : $g(x) = e^{-x}\dfrac{1 - e^{-x}}{x}$.

En déduire, à l'aide de l'inégalité (1), que pour tout $x > 0$, $g(x) \leqslant e^{-x}$.

3. Déduire des questions précédentes que la fonction g est prolongeable par continuité au point $x = 0$.

4. **a.** Calculer la dérivée g' de la fonction g.

b. En utilisant l'inégalité (1), montrer que, pour tout $x > 0, g'(x) \leqslant -e^{-2x}$.

En déduire le sens de variation de la fonction g.

B Dans cette partie, on étudie la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= 1\\ f(x) &= g(x),\ \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

1. **a.** Justifier l'écriture, pour $x > 0$:

$$g(x) = e^{-\frac{3x}{2}} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{-x}{2}}}{x}$$

b. Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

Étudier le sens de variation de u.

c. Soit a un réel strictement positif.

Démontrer que, pour tout réel t, tel que $0 \leqslant t \leqslant a$:

$$2 \leqslant e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \leqslant e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, démontrer que :

$$1 \leqslant \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{a} \leqslant \frac{e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}}{a} \qquad (2)$$

d. En déduire, à l'aide des inégalités (2), que pour tout $x > 0$:

$$e^{-\frac{3x}{2}} \leqslant g(x) \leqslant \frac{e^{-x} + e^{-2x}}{2} \qquad (3)$$

En utilisant les inégalités (3), étudier la limite de $\dfrac{g(x) - 1}{x}$ quand x tend vers 0. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 0$.

2. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal (unité de longueur : 5 cm).

3. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan $\mathscr{P}$ délimitée par $\mathscr{C}$, les axes du repère et la droite D d'équation $x = 1$. On se propose de déterminer des encadrements de l'aire.$\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$,exprimée en cm^2.

a. Donner un encadrement de $\mathscr{A}$ à l'aide de rectangles en partageant l'intervalle $[0\,;\,1]$ en cinq intervalles de même longueur.

b. En utilisant les inégalités (3), donner un autre encadrement de $\mathscr{A}$.