Durée : 4 heures

Baccalauréat C Caen [1] septembre 1986

EXERCICE 1 **5 points**

Soit n un nombre entier supérieur à 1.
On considère une urne dans laquelle se trouvent :

– une boule portant le numéro 1,
– deux boules portant le numéro 2,
– trois boules portant le numéro 3,
– etc.
– n boules portant le numéro n

1. Combien l'urne contient-elle de boules ?

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, tous les tirages sont squpposés équiprobables.

a. On suppose dans cette question que n est pair.
Exprimer en fonction de n la probabilitéé pour que la boule tirée porte :
un numéro pair ;
un numéro impair.

b. Dans cette question, on suppose seulement que le nombre total de boules dans l'urne est 21.
Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}\right)$. Soit A (1 ; 0) et B(−1 ; 0). À tout point M d'affixe $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe z' défini par

$$z \times z' = 1.$$

1. **a.** Construire M' quand $z = 2(1+\mathrm{i})$.

b. Dans le cas général, montrer que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M},\,\overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right)$ et que $\mathrm{O}M \times \mathrm{O}M' = \mathrm{OA}^2$.

2. **a.** Vérifier que

$$\forall z \in \mathbb{C}^{\star},\quad \left(\frac{z+z'}{2}-1\right)\left(\frac{z+z'}{2}+1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2.$$

b. Soit I le milieu de $[MM']$. En utilisant a. montrer que

$$I\mathrm{A} \times I\mathrm{B} = IM^2$$

et que pour $M \neq \mathrm{A}$ et $M \neq \mathrm{B}$ la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{I\mathrm{A}},\,\overrightarrow{I\mathrm{B}}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

$\mathscr{R}$ désigne le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité 5 cm).

1. Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

Partie A

1. La fonction f_1 est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par f1 (x) = x ln x (ln x désigne le logarithme népérien de x).
   a. Étudier ses variations.
   b. Montrer que f1 admet un prolongement par continuité en O.
   c. Tracer dans le repère f!lt la courbe représentative 1 de la fonction g 1 définie sur IR + par : gl (0) = 0 gl (x) = f1 (x) pour x > O. On précisera la tangente à 1 à l'origine.
2. Dans cette question x désigne un réel supérieur à 1.
   a. Montrer que si t est un réel vérifiant 1 : :Ç t : :Ç x alors 1 1 - : :Ç - : :Ç l. x t
   b. Déduire de ce qui précède et de la définition de ln x, les inégalités, x - 1 pour x 1, – : :Ç ln x : :Ç x - 1. x
   c. Démontrer pour x 1 que x - 1 : :Ç f1 (x) : :Ç x2 - X (1).

Partie B

Dans cette partie, on étudie la résolution de l'équation (E) d'inconnue réelle x : (E) : f1(x) = 1, où f1 désigne la fonction définie au A :

1. Démontrer que l'équation E admet une solution unique Xl telle que
2. Montrer que
3. On se propose de déterminer une valeur approchée décimale de Xl à 10-2 près.
   a. Déterminer une équation de la tangente (T) à 1 au point de coordonnées (2,2 ln 2). Calculer l'abscisse x du point d'intersection de la tangente (T) avec la droite (D) dont une équation est y = 1.
   b. Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée décimale à 10-2 près par défaut de f1(x1) ; en déduire l'encadrement : 1 + J5 2 : :Ç Xl : :Ç x pUIS une valeur approchée décimale de Xl à 10-1 près. (
   c. Donner une valeur approchée de fI (1,76) à 10 - 3 près par excès. En déduire l'encadrement :
   puis une valeur approchée décimale de x 1 à 10- 2 près.

Partie C

Dans cette partie n désigne un entier strictement supérieur à 1.

1. La fonction f_n est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n \ln x.$$

   a. Étudier ses variations. Montrer que f_n admet un prolongement par continuité au point 0.
   b. La fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_n(0) & = & 0\\ g_n(x) & = & x^n \ln x \quad \text{pour } x > 0.\end{array}\right.$$

   Tracer dans le repère les courbes représentatives rri 2 et rri 3 des fonctions g_2 et g_3. On précisera les tangentes à l'origine aux courbes rri 2 et rri 3.
   c. Donner l'allure générale des courbes représentatives rrin des fonctions g_n. On précisera en particulier leurs positions relatives.
2. **a.** Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique x_n et que $1 < x_n$.

b. Démontrer que la suite de terme général x_n, $n \geqslant 2$, est décroissante.

c. On pose $t_n = (x_n)^n$. Montrer que $t_n \ln(tN) = n$.

d. En utilisant la partie A et ce qui précède, montrer que : $1 \leqslant t_n \leqslant n+1$, et en déduire un encadrement de x_n.

e. Démontrer que la suite de terme général x_n admet une limite que l'on précisera.