

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Grèce septembre 1987 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit, dans le plan orienté, un triangle équilatéral ABC de côté $a > 0$ tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $+\frac{\pi}{3}$. \mathcal{C} est le cercle de centre B et de rayon $\frac{a}{2}$ et \mathcal{C}' le cercle de centre C et de rayon $\frac{a}{2}$.

À tout point M de \mathcal{C} on associe le point M' de \mathcal{C}' tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'})$ ait pour mesure $+\frac{\pi}{3}$.

1. Montrer que les droites (BM) et (CM') sont sécantes; K désignant leur point d'intersection, montrer que les points A, B, C, K sont cocycliques.
2. Montrer que la rotation de centre A transformant B en C transforme M en M' .
3. Soit I le milieu de (M, M') . Montrer que I est l'image de M dans une similitude directe de centre A, indépendante de M , dont on précisera les autres éléments. Quel est l'ensemble décrit par le point I quand M décrit \mathcal{C} ?
Le tracer.

EXERCICE 2

5 points

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , construire sur une même figure l'ensemble E_1 des points du plan dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} y^2 = 24x + 24 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

et l'ensemble E_2 des points du plan dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} y^2 = -4x + 24 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(on prendra 1 cm pour unité).

E_1 est une partie d'une parabole \mathcal{P}_1 , E_2 est une partie d'une parabole \mathcal{P}_2 . Montrer que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ont même foyer F, tracer la directrice de \mathcal{P}_1 et la directrice de \mathcal{P}_2 sur la figure précédente.

2.
 - a. Vérifier que tout point M de la réunion des ensembles E_1 et E_2 est tel que la somme des distances de M à F et de M à l'axe des ordonnées est égale à 7.
 - b. Démontrer que, réciproquement, tout point du plan dont la somme des distances à F et à l'axe des ordonnées est égale à 7 appartient à la réunion des ensembles E_1 et E_2 .

PROBLÈME

11 points

Partie A

Dans cette partie, on étudie la fonction f de la variable réelle x définie sur $D =]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble ainsi que la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur D .
3. Construire, dans un repère orthonormal du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 4 cm, la courbe \mathcal{C} représentative de f .
4.
 - a. Montrer que f est une bijection de D sur \mathbb{R} .
 - b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans D une solution unique, notée x_1 et montrer que : $0,7 < x_1 < 0,8$.
5. Calculer en fonction de x_1 et en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction g définie sur D par

$$g(x) = e^{-x} \ln(1+x).$$

1.
 - a. Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de D .
 - b. En utilisant la question A 4. étudier les variations de g ; donner une valeur approchée du maximum de g .
 - c. Montrer que, pour tout x de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, $g(x)$ appartient à $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.
2. On se propose dans cette question de démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans D une solution unique.
 - a. On pose, pour x appartenant à D : $h(x) = x - g(x)$; exprimer $h'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et montrer, en utilisant les variations de f étudiées en A, que $h'(x)$ est du signe de x .
Étudier les variations de h .
 - b. Montrer que, pour tout x non nul appartenant à D , on a : $h(x) > 0$.
 - c. Résoudre alors dans D l'équation $g(x) = x$.
3. Tracer la courbe Γ représentative de g ainsi que la tangente à Γ en O , dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 4 cm.
4. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence, pour tout entier n : $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.
 - b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - c. Déduire des questions précédentes que la suite converge et trouver sa limite ℓ (on montrera que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$).
 - d. Représenter à l'aide de la courbe Γ les termes u_0, u_1, u_2 sur (O, \vec{i}) .