Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C La Réunion septembre 1987 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe d'équation :

$$16(x+6)|x+6|+36y|y| = 576.$$

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan, on donne un triangle équilatéral ABC.
À chaque point M du segment [AC], on associe :

- le projeté P de M sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB),
- le point Q vérifiant : BCQM est un parallélogramme,
- le point d'intersection N des droites (MQ) et (AB),
- et les points O, I, J et D, milieux respectifs de (B, C), (M, Q), (N, P) et (A, B).

1. Montrer qu'il existe un déplacement D que l'on déterminera tel que, pour tout élément M du segment [AC], on ait : D(M) = I.
Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit le segment [AC].

2. Lorsque le point M décrit le segment [AC] :

a. Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle MCQ.

b. Déterminer le lieu géométrique du point J.

c. Montrer que la droite (IJ) passe par un point indépendant du choix de M sur le segment [AC].

PROBLÈME **12 points**

On désigne par $R = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan, et par a, b et c des réels quelconques. Les fonctions f_0, f_1, f_2 et f sont respectivement définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad f_1(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad f_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

et

$$f(x) = \left(a+bx+cx^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

On désignera par : $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes représentatives respectives de f_0, f_1 et f_2 dans le repère R.

A On se propose de représenter $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

1. Étudier les variations des fonctions f_0, f_1 et f_2.

2. Préciser par leurs coordonnées dans le repère R, les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_0$, et $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_1$.

3. Étudier sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, le signe de chacune des expressions :

$$f_1(x) - f_0(x), \quad f_2(x) - f_0(x) \text{ et } f_2(x) - f_1(x)$$

4. Tracer les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le repère R, et hachurer le domaine fermé $\mathscr{E}$, déterminé par les trois courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan, dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère R vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lllll}-1 & \leqslant & x & \leqslant & 0\\ f_2(x) & \leqslant & y & \leqslant & f_0(x)\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lllll}0 & \leqslant & x & \leqslant & 1\\ f_1(x) & \leqslant & y & \leqslant & f_0(x)\end{array}\right.$$

B On se propose de calculer l'aire de $\mathscr{E}$

1. Soit n un entier naturel quelconque. Montrer qu'en posant :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

on définit une fonction I_n qui a l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels pour ensemble de définition.

2. Soit n un entier naturel, et x un réel quelconque. Montrer que

$$I_{n+1}(x) = -2x^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 2(n+1)I_n(x).$$

3. Soit x un réel quelconque. Calculer $I_0(x)$ en fonction de x. En déduire les expressions de $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x.

4. Calculer l'aire de $\mathscr{E}$.

C. On se propose de calculer la dérivée d'ordre n de f

On désigne par $f^{(0)}$ (ou f), $f^{(1)}$ (ou f'), $f^{(2)}$ (ou f''), $f^{(3)}$ ou f'''), etc., les dérivées successives de la fonction f.

1. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on peut trouver trois réels : α_n, β_n et γ_n vérifiant pour tout réel x :

$$f_n(x) = \left(\alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

On trouvera : $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et $\gamma_0 = c$; et pour chaque entier naturel n, le raisonnement par récurrence, montrera que α_{n+1}, β_{n+1} et γ_{n+1} vérifient :

$$\alpha_{n+1} = \beta_n - \frac{1}{2}\alpha_n,\ \beta_{n+1} = 2\gamma_n - \frac{1}{2}\beta_n \text{ et } \gamma_{n+1} = -\frac{1}{2}\gamma_n.$$

2. Pour chaque entier naturel n, on pose

$$\beta'_n = \beta_n + 4n\gamma_n \text{ et } \alpha'_n = \alpha_n + 2n\beta_n + 4n(n+1)\gamma_n.$$

Montrer que $\left(\alpha'_n\right)$, $\left(\gamma'_n\right)$ et $\left(\gamma'_n\right)$ sont des suites géométriques de raison $-\dfrac{1}{2}$.

3. En déduire pour chaque entier naturel n, l'expression de α_n, β_n et γ_n en fonction de n, a, b et c.