

∞ Baccalauréat C Liban juin 1987 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans cet exercice, pour noter les entiers, on utilise le système décimal.

Soit E le sous-ensemble de \mathbb{N} constitué des entiers n qui possède les propriétés suivantes :

- 4 divise n
- n admet au moins dix diviseurs appartenant à \mathbb{N}
- il existe un entier premier p tel que $n = 37p + 1$.

1. Quel est le plus petit élément de E ?
2. Existe-t-il un élément n , de E , vérifiant $26\,800 < n < 27\,800$?

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit E un plan vectoriel euclidien rapporté à une base (\vec{a}, \vec{b}) . (Le produit scalaire des vecteurs \vec{x} et \vec{y} de E est noté $\vec{x} \cdot \vec{y}$).

Soit φ l'application de \mathbb{R} dans E , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \cos x \vec{a} + \sin x \vec{b}$$

et φ' sa dérivée.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ constituent une base de E .
2. Pour tout réel t , décomposer $\varphi(t)$ dans une telle base.
3. Étudier l'ensemble des réels u tels que $\varphi(u) \cdot \varphi'(u) = 0$.

PROBLÈME

4 POINTS

1. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt.$$

Montrer que, $\forall x > 0$, $f(x) \leq e^{-x}$.

Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel b strictement positif,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left[x \leq b \Rightarrow e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2} e^b x^2 \right] \quad \text{et}$$

$$\left[x \geq -b \Rightarrow e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2} e^b x^2. \right]$$

- b. Montrer que, pour tout réel a , il existe une application φ_a , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue en a , telle que $\varphi_a(a) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x - a) \left(- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x) \right).$$

En déduire que f est différentiable.

Préciser la dérivée f' de f .

3. Soit P une primitive (sur \mathbb{R}) de l'application $f : u \mapsto e^{-u^2}$.

À tout réel x , on associe l'application Q_x , de $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur I ; expliciter sa dérivée.

Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-u^2} du = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt.$$

4. Soit g l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x^2).$$

Soit g' sa dérivée. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Que peut-on dire de la fonction h telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 ?$$

Quelle est la limite de $\int_0^x e^{-t^2} dt$ quand x tend vers $+\infty$?