

## ∞ Baccalauréat C Liban juin 1987 ∞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Dans cet exercice, pour noter les entiers, on utilise le système décimal.

Soit  $E$  le sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  constitué des entiers  $n$  qui possède les propriétés suivantes :

- 4 divise  $n$
- $n$  admet au moins dix diviseurs appartenant à  $\mathbb{N}$
- il existe un entier premier  $p$  tel que  $n = 37p + 1$ .

1. Quel est le plus petit élément de  $E$  ?
2. Existe-t-il un élément  $n$ , de  $E$ , vérifiant  $26\,800 < n < 27\,800$  ?

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit  $E$  un plan vectoriel euclidien rapporté à une base  $(\vec{a}, \vec{b})$ . (Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $E$  est noté  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ).

Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $E$ , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \cos x \vec{a} + \sin x \vec{b}$$

et  $\varphi'$  sa dérivée.

1. Montrer que  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\alpha)$  et  $\varphi'(\alpha)$  constituent une base de  $E$ .
2. Pour tout réel  $t$ , décomposer  $\varphi(t)$  dans une telle base.
3. Étudier l'ensemble des réels  $u$  tels que  $\varphi(u) \cdot \varphi'(u) = 0$ .

### PROBLÈME

4 POINTS

1. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt.$$

Montrer que,  $\forall x > 0$ ,  $f(x) \leq e^{-x}$ .

Quelle est la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2. a. Montrer que, pour tout réel  $b$  strictement positif,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left[ x \leq b \Rightarrow e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2} e^b x^2 \right] \quad \text{et}$$

$$\left[ x \geq -b \Rightarrow e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2} e^b x^2 \right].$$

- b. Montrer que, pour tout réel  $a$ , il existe une application  $\varphi_a$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue en  $a$ , telle que  $\varphi_a(a) = 0$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x - a) \left( - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x) \right).$$

En déduire que  $f$  est différentiable.

Préciser la dérivée  $f'$  de  $f$ .

3. Soit  $P$  une primitive (sur  $\mathbb{R}$ ) de l'application  $f : u \mapsto e^{-u^2}$ .

À tout réel  $x$ , on associe l'application  $Q_x$ , de  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que  $Q_x$  est dérivable sur  $I$ ; expliciter sa dérivée.

Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-u^2} du = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt.$$

4. Soit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x^2).$$

Soit  $g'$  sa dérivée. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Que peut-on dire de la fonction  $h$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 ?$$

Quelle est la limite de  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?