Baccalauréat C Lille juin 1987

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Trouver la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 2$.

2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^3 - 5X - 2 = 0$. (On cherchera une solution particulière dans $\mathbb{Z}$.)

   b. Résoudre dans l'équation $f(x) = -2$.

3. **a.** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On précisera les valeurs d'annulation de f.

   b. Dresser un tableau des valeurs numériques à 10^{-2} près par défaut, données par la calculatrice, de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,9 ; 1.

   c. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, avec $\left\|\vec{\imath}\right\| =$ 10 cm et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 1$ cm, tracer avec précision sur papier millimétré la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n > 0$ on a :

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boîtes (chaque boîtes pouvant contenir de 0 à n boules).
   On désigne par P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
   Montrer que $P_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

3. En utilisant le 1, montrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} \geqslant 2.$$

   En déduire que $P_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$?

PROBLÈME **11 POINTS**

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On nomme D la droite de repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ et Δ la droite de repère $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels qu'une mesure des angles $\left(\vec{\imath}, \vec{u}\right)$ et $\left(\vec{\jmath}, \vec{v}\right)$ soit $+\dfrac{\pi}{6}$.

Par tout point M du plan on fait passer les droites D_M et Δ_M de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D_M coupe D en m et Δ_M coupe Δ en p.
On désigne par M′ le point dont les projections orthogonales sur D et Δ sont respectivement m et p.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à M associe M′.

A.

1. Construire l'image d'un point non situé sur D et Δ, puis celle d'un point de D distinct de O, puis celle d'un point de Δ distinct de O.
2. Quelle est l'image du point O ?
3. M étant un point quelconque du plan, distinct de O, démontrer :
   - **a.** que les points O, m, p, M et M′ sont sur un même cercle ;
   - **b.** que le triangle OMM′ est rectangle en M et que :

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

4. En déduire que f est une similitude directe que l'on précisera.

B. Le but de cette partie est de déterminer la nature de l'application f par une méthode différente de celle de la partie A
Elle doit donc être résolue sans utiliser les résultats du A.

M étant un point quelconque du plan, on note $(x\,;\,y)$ ses coordonnées dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points m et p en fonction de x et y. En déduire que les coordonnées x' et y' du point M′ sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x - y\sqrt{3}\\ y' &=& x\sqrt{3} + y.\end{array}\right.$$

2. Soit $z = x + iy$ l'affixe du point M et $z' = x' + iy'$ celle du point M′. Démontrer que z' s'écrit αz, où α est un nombre complexe que l'on calculera.
   En déduire que f est une similitude directe et donner sa forme réduite.

C. Pour cette partie on fera une figure distincte de celles des parties précédentes et on prendra 2 cm comme unité de longueur.
On pourra se servir de l'expression analytique de f donnée au B.

1. Soit H l'hyperbole d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer ses asymptotes, son foyer d'abscisse positive et la directrice associée.
   Calculer son excentricité. Construire H.
2. Soit H' la courbe image de H par l'application f.
   Prouver que H' est une hyperbole dont on précisera l'excentricité. Déterminer un foyer de H' et la directrice associée. Construire H'. (On admettra que les asymptotes de H' sont les images par f des asymptotes de H).
   Démontrer que H' est la représentation graphique de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{6}{x}\right).$$

3. Soit L la droite d'équation $x = 2$ et L' son image par f.
   Déterminer les points d'intersection de L' et H'. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe H' et la droite L'.

4. Interpréter graphiquement l'intégrale Z2 ?3

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}\,\mathrm{d}x,$$

et en déduire sa valeur du résultat précédent.